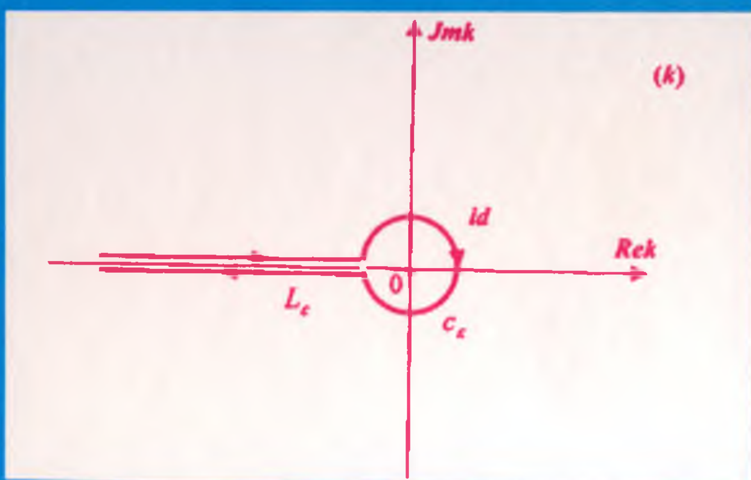
ELM

Б.А.ИСКЕНДЕРОВ

ПРИНЦИПЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ



Б.А.ИСКЕНДЕРОВ

Б. А. ИСКЕНДЕРОВ

ПРИНЦИПЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Баку – «Элм» – 2004

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета Института Математики и Механики НАН Азербайджана от 14 января 2004 года

Главный редактор — **член-корр. НАНА, проф. Ю.А.Мамедов**

Рецензент — **д.ф.-м.н., проф. С.С.Мирзоев**

Б.А. Искендеров Принципы излучения для эллиптических уравнений в цилиндрических областях. Баку, 2004, 180 стр.

ISBN 5-8066-1674-6

В монографии изучены принципы излучения в многомерной цилиндрической области для уравнения Гельмгольца и для эллиптических уравнений высокого порядка, найдена скорость стремления решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи при больших значениях времени. В цилиндрах, продольная размерность которых не больше чем порядок уравнения, для рассмотренных задач изучено резонансное явление и указана скорость роста решения нестационарной задачи при больших значениях времени. Аналогичные результаты получены также для гиперболических систем уравнений с переменными коэффициентами.

Монография представляет интерес для математиков, физиков, механиков и др.

$\frac{1602020000}{655(07) - 2004}$

ВВЕДЕНИЕ

Большое значение в физике и механике имеет изучение распространения волн в бесконечных областях. Такими являются распространение радиоволн на большие расстояния в атмосфере, распространение звука в море, волн в трубах и др. Эти явления приводят к краевым задачам в цилиндрических областях для уравнения Гельмгольца. Имеется довольно обширная литература, посвященная различным краевым задачам для уравнений с частными производными в слоистых средах. Подробную литературу можно найти, например, в работах [1]-[6].

Для выделения "физически интересных" решений краевых задач для эллиптических уравнений в бесконечных областях со спектральным параметром, когда этот параметр есть точка непрерывного спектра задачи, применяют три способа, а именно: принцип предельного поглощения, принцип предельной амплитуды и условия излучения Зоммерфельда. Для краткости эти принципы и условия излучения Зоммерфельда принято называть принципами излучения.

Принципы излучения во всем пространстве или во внешности ограниченной области с гладкой границей хорошо изучены в работах А.Н.Тихонова, А.А.Самарского [7], И.Н.Векуа [26], А.Г.Костюченко [9], М.Г.Гасымова

[10], В.П.Михайлова [11], [12], Е.К.Исаковой [13], Л.А.Муравья [14]-[16], Б.Р.Вайнберга [17], Д.М.Эйдуса [18], [19], В.В.Грушина [20], Г.Лакса, К.Моравца, Р.Филлипса [51], [52] и др. Более подробную литературу по принципам излучения можно найти в [17].

Принцип предельного поглощения для уравнения Гельмгольца в двумерном слое рассмотрен в [1], в трехмерном слое принцип предельного поглощения, предельной амплитуды и условия излучения рассмотрены А.Г.Свешниковым в [21]. Условия излучения в слое по форме отличны от условий излучения Зоммерфельда во всем пространстве или во внешности ограниченной области. В трехмерном слое для уравнения Гельмгольца условия излучения впервые были выведены А.Г.Свешниковым в [21] и теперь в литературе их принято называть парциальными условиями излучения А.Г.Свешникова. Принципы излучения в многомерном слое изучены в работе [22]. Принцип предельного поглощения и парциальные условия излучения А.Г.Свешникова в случае краевых условий Дирихле или Неймана для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндрическом волноводе изучены в работе [23]. Отметим также работы М.В.Федорюка [24] и В.М.Фаворина [25].

Принципы излучения не изучены для эллиптических уравнений высокого порядка, в частности, для уравнения Гельмгольца, в многомерных цилиндрических областях. В настоящей работе изучаются эти вопросы, а именно: изучены принцип предельного поглощения, принцип предельной амплитуды, выведены парциальные условия излучения А.Г.Свешникова для уравнения Гельмгольца в многомерной цилиндрической области, найдена скорость стремления решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи. В двух и трехмерных цилиндрах в резонансных случаях при $t \to +\infty$ указана скорость роста решения нестационарной задачи. Аналогичные результаты получены для уравнения Гельмгольца в n-мерном слое с импедансными краевыми условиями и для краевой задачи в многомерном цилиндре для эллиптических уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. Доказаны принципы предельного поглощения и предельной амплитуды для краевой задачи в полупространстве для эллиптических систем уравнений с комплексным параметром и изучено поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи в четверти пространства для уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, главные части которых являются строго гиперболическими дифференциальными выражениями.

Приведем вкратце приведенные в монографии результаты.

В первой главе доказаны принципы излучения для эллиптического уравнения второго порядка в многомерной цилиндрической области. Для этой цели построена функция Грина первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца в многомерной цилиндрической области. Затем исследовано решение смешанной задачи для волнового уравнения. При $n \geq 3$ имеет место принцип предельной амплитуды – при любом значении частоты внешней силы решение нестационарной задачи при $t \to +\infty$ стремится к решению соответствующей стационарной задачи со скоростью $t^{-\frac{n}{2}}$, где n-продольная размерность цилиндра. При $n \leq 2$, в случае, когда частота внешней силы равна квадратному корню одного из собственных чисел стационарной краевой задачи на поперечном сечении цилиндра, при $t \to +\infty$ происходит резонансное явление, при котором решение нестационарной задачи растет при $t \to +\infty$, и найдена скорость роста решения. Для остальных значений частоты внешней силы имеет место принцип предельной амплитуды и найдена скорость стремления решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи при $t \to +\infty$, которая равна $t^{-\frac{n}{2}}$.

Этот результат является новым, который не был известен раньше. Относительно резонансного явления нам известен только один результат ([39], с.469) для смешанной задачи для волнового уравнения на конечном отрезке.

Во второй главе в цилиндрической области изучена смешанная задача для волнового уравнения с финитным возмущением. С помощью функции Грина, которая была построена в первой главе для стационарной задачи с постоянными коэффициентами, стационарная задача с финитным возмущением приведена к операторно-интегральному уравнению с вполне непрерывным оператором, аналитически зависящим от комплексного спектрального параметра. Используя теорему Харазова-Сили, получено разложение решения смешанной задачи при $t \to +\infty$, из которого при конечном числе условий ортогональности на правую часть уравнения следует принцип предельной амплитуды. Далее, в этой главе изучены принципы излучения для уравнения Гельмгольца с импедансным краевым условием в многомерном слое. Отметим, что такая задача изучена впервые.

В третьей главе изучены принципы излучения для эллиптического уравнения высокого порядка в многомерной цилиндрической области. Для этой цели построена функция Грина рассматриваемой задачи. Здесь также найдена скорость стремления решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи при больших значениях времени в нерезонансных случаях, при этом скорость стремления есть $t^{-\frac{n}{2N}}$, где n – продольная размерность цилиндра, а $2N$ – порядок эллиптического уравнения. При $n \leq 2N$ выявлено резонансное явление и найдена скорость роста решения нестационарной задачи при $t \to +\infty$.

В четвертой главе изучены принципы излучения для краевой задачи в полупространстве для эллиптических систем уравнений с комплексным параметром, изучено также поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи в четверти пространства для строго гиперболических уравнений высокого порядка с финитным возмущением.

Основное содержание работы опубликовано в работах [57]-[67].

Автор с благодарностью вспоминает одного из своих любимых учителей – известного математика, доктора физико-математических наук, профессора М.В.Федорюка, трагически погибшего в 1990 году.

ГЛАВА I

ПРИНЦИПЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В МНОГОМЕРНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе обоснованы принципы предельного поглощения, предельной амплитуды и изучены парциальные условия излучения А.Г.Свешникова для уравнения Гельмгольца в многомерной цилиндрической области. Найдена скорость стремления решения нестационарной задачи к решению соответствующей стационарной задачи. В цилиндрах с одномерными и двумерными продольными переменными в резонансных случаях (при этом принцип предельной амплитуды не имеет места) указана скорость роста при $t \to +\infty$ решения нестационарной задачи.

§1.1. Обозначения, постановка задачи и вспомогательная теорема

Обозначим через $R_m(y)$ m-мерное евклидово пространство с точкой $y=(y_1,y_2,...,y_m)$, а через $R_n(x)$ такое же пространство с точкой $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Пусть $Ц = R_n(x)\times\Omega$ цилиндрическая область в $R_n(x)\times R_m(y)$, где Ω есть ограниченная область в $R_m(y)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, где $\partial\Omega \in C^{\left[\frac{3m}{2}\right]}$.

Рассмотрим в $Ц$ следующую краевую задачу

$$(\Delta + k^2)u(k,x,y) = f(x,y), \qquad (1.1.1)$$

$$u(k,x,y)|_{\Gamma} = 0, \qquad (1.1.2)$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_\nu^2}$, $f(x,y) \in C_0^\infty(Ц)$, k^2 – постоянная, причем не обязательно вещественная, Γ – граница цилиндра $Ц$.

Через $C_0^\infty(Ц)$ будем обозначать пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носители которых содержатся в $Ц$, а через $C^l(D)$ - пространство функций, непрерывных вместе с производными до порядка ℓ включительно в области $D \subset R_n \times R_m$.

Определение 1.1.1. *Пусть* $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$. *Функция* $u(k,x,y) \in C^2(Ц) \bigcap C(\overline{Ц})$, *стремящаяся к нулю при* x→∞, *называется решением задачи (1.1.1)-(1.1.2), если она удовлетворяет уравнению (1.1.1) в обычном смысле и обращается в нуль на границе* Γ *цилиндра* $Ц$.

В случае, когда k^2 есть точка непрерывного спектра задачи (1.1.1)-(1.1.2), известны три способа выделения «физически интересных» решений задачи. Это принцип предельного поглощения, предельной амплитуды или на бесконечности на решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) налагаются условия излучения. Мы будем обосновывать эти принципы и изучим условия излучения для задачи (1.1.1)-(1.1.2).

В дальнейшем через $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ будем обозначать двойственное к x переменное относительно преобразования Фурье.

Наряду с задачей (1.1.1)-(1.1.2) рассмотрим также задачу

$$(\Delta + k^2) G(k,x,y) = \delta(x,y), \qquad (1.1.3)$$

$$G(k,x,y)|_{\Gamma} = 0, \qquad (1.1.4)$$

где $x, y \in Ц$, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Определение 1.1.2. *Пусть* $\operatorname{Im} k^2 \neq 0$. *Убывающее решение задачи (1.1.3)-(1.1.4) при* $x \to \infty$ *(при каждом* $y \in \Omega$*) будем называть функцией Грина задачи (1.1.1)-(1.1.2).*

В дальнейшем будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.1.1 (см. [38], с.15). *Пусть*

$$F(t) = \int_0^a \varphi(x)\exp(-xt)dx, \quad a > 0,$$

где $\varphi(x)$ *– аналитическая функция, регулярная в точках отрезка* $0 < x \leq a$, *а в окрестности точки* $x = 0$ *представимая рядом*

$$\varphi(x) = x^{\alpha}(a_0 + a_1 x + \ldots), \quad \alpha > -1.$$

Тогда при $t \to +\infty$

$$F(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha+p}} a_{p-1},$$

где $\Gamma(\alpha)$ *есть гамма-функция Эйлера.*

Имеет место следующая асимптотическая оценка функций Ханкеля при больших значениях аргумента, которая в дальнейшем будем пользоваться (см.[29], с.169)

$$H_{\mu}^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[\pm i\left(z - \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left[1 + O(z^{-1})\right] \qquad (1.1.5)$$

§1.2. Построение функции Грина задачи (1.1.1)-(1.1.2) и принцип предельного поглощения

Как мы отметили выше, при $k^2 > 0$ для выделения «физически интересных» решений задачи (1.1.1)-(1.1.2) применяют принцип предельного поглощения.

Определение 1.2.1. *Будем говорить, что для задачи (1.1.1)-(1.1.2) имеет место принцип предельного поглощения, если для стремящегося к нулю в бесконечности решения этой же задачи с комплексным параметром* $k_\varepsilon^2 = k^2 + i\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0)$ *существует предел*

$$u(k,x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} u(k_\varepsilon, x, y)$$

равномерно по x, y *в каждом компакте из* Ц *и* $u(k,x,y)$ *удовлетворяет предельной задаче.*

Для построения решения задачи (1.1.1)-(1.1.2) с комплексным параметром k_ε^2 совершим преобразование Фурье по x. Тогда получим следующую краевую задачу

$$\left[\Delta_y + \left(k_\varepsilon^2 - |s|^2\right)\right]\hat{u}(k_\varepsilon, s, y) = \hat{f}(s,y), \qquad (1.2.1)$$

$$\hat{u}(k_\varepsilon, s, y)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1.2.2)$$

где $\hat{u}(k_\varepsilon, x, y) = F_{x\to s}(u(k_\varepsilon, x, y))$, $F_{x\to s}$ - преобразование Фурье по x и Δ_y – оператор Лапласа относительно переменной y.

Рассмотрим следующий оператор $L = -\Delta_y$ с областью определения

$$D(L) = \left\{\vartheta : \vartheta \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ \Delta\vartheta \in L_2(\Omega),\ \vartheta\big|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Относительно оператора L имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.1. (см. [39], с.348). *Множество собственных значений* $\{\lambda_\ell\}$ *оператора* L *счетно и не имеет конечных предельных точек, каждое собственное значение* λ_ℓ *имеет конечную кратность и наименьшее собственное значение простое. Собственные функции* $\{\varphi_\ell(y)\}$ *можно выбрать вещественными и ортонормированными. Всякая функция из* $L_2(\Omega)$ *разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье.*

Как следует из этой теоремы для собственных значений оператора L имеет место цепь неравенств:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_\ell \le \ldots \to \infty \qquad при \qquad \ell \to \infty$$

Так как $k_\varepsilon^2 - |s|^2 \ne \lambda_\ell$ для любого $s \in R_n$ и $\hat{u}(k_\varepsilon, s, y) \in D(L)$, то, используя теорему 1.2.1 для решения задачи (1.2.1)-(1.2.2), получим

$$\hat{u}(k_\varepsilon, s, y) = R_{k_\varepsilon^2 - |s|^2}\hat{f}(s, y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{C_\ell(s)\varphi_\ell(y)}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2}, \qquad (1.2.3)$$

где R_μ - резольвента оператора L,

$$C_\ell(s) = \int_\Omega \hat{f}(s, y)\varphi_\ell(y)dy. \qquad (1.2.4)$$

Заметим, что λ_ℓ и $\varphi_\ell(y)$ не зависят от s.

Теперь решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) определится как обратное преобразование Фурье от $\hat{u}(k, s, y)$

$$u(k_\varepsilon, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n} \hat{u}(k_\varepsilon, s, y)\exp[-i(s, x)]ds =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\ell=1}^{\infty} \varphi_\ell(y) \int_{R_n} \frac{C_\ell(s)\exp[-i(s,x)]}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} ds \qquad (1.2.5)$$

Здесь почленное интегрирование законно в силу равномерной сходимости ряда (1.2.3) и его производных (теорема 9, [41], с.231). Учитывая (1.2.4) и $\hat{f}(s,y) = F_{x \to s}(f(x,y))$ в (1.2.5), получим

$$u(k_\varepsilon, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\ell=1}^{\infty} \varphi_\ell(y) \int_{R_n} [f_\ell(\xi) \int_{R_n} \frac{\exp[i(\xi - x, s)]}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} ds] d\xi, \qquad (1.2.6)$$

где

$$f_\ell(\xi) = \int_{\Omega} f(\xi, y) \varphi_\ell(y) dy. \qquad (1.2.7)$$

Обозначим через

$$J_\ell(k_\varepsilon, x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N \to \infty} \int_{|s| \le N} \frac{\exp[i(\xi - x, s)]}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} ds \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{N \to \infty} J_{\ell_N}(k_\varepsilon, x, \xi). \qquad (1.2.8)$$

Перейдя в (1.2.8) к сферическим координатам и учитывая сферическую симметричность $\left(\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2\right)^{-1}$, будем иметь:

$$J_{\ell_N}(k_\varepsilon, x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \times$$

$$\times \int_0^N \left\{ \int_{\Omega_r} \exp(i|\xi - x||s|\cos\theta) d\widetilde{\omega} \right\} \frac{|s|^{n-1}}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} d|s|, \qquad (1.2.9)$$

где Ω_r – сфера радиуса r с центром в начале координат, θ - угол между направлениями векторов $\xi - x$ и s, а $\widetilde{\omega}$ - точка единичной сферы. Так как

$$\int\limits_{\Omega_r} \exp(i|\xi - x||s|\cos\theta)d\widetilde{\omega} =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(|\xi - x||s|)^{1-\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}-1}(|\xi - x||s|), \qquad (1.2.10)$$

где $j_{\frac{n}{2}-1}(z)$ есть функция Бесселя порядка $\frac{n}{2}-1$, то, подставляя (1.2.10) в (1.2.9), получим

$$J_{\ell_N}(k_\varepsilon, x, \xi) = (2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}|\xi - x|^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_0^N \frac{|s|^{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}-1}(|\xi - x||s|)}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} d|s|.$$

Пусть n – нечетное число. Тогда $z^{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}-1}(z)$ есть четная функция. Поэтому

$$J_{\ell_N}(k_\varepsilon, x, \xi) = \frac{1}{2}(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}|\xi - x|^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_{-N}^N \frac{|s|^{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}-1}(|\xi - x||s|)}{\lambda_\ell - k_\varepsilon^2 + |s|^2} d|s|.$$

Выражая функции Бесселя через функции Ханкеля (см.[29], с.175)

$$j_\nu(z) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)),$$

получим

$$J_{\ell_N}(k_\varepsilon,x,\xi)=4^{-1}(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}\left[\int\limits_{-N}^{N}\frac{|s|^{\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|\xi-x||s|)}{\lambda_\ell-k_\varepsilon^2+|s|^2}d|s|+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-N}^{N}\frac{|s|^{\frac{n}{2}}H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(|\xi-x||s|)}{\lambda_\ell-k_\varepsilon^2+|s|^2}d|s|\right]\equiv J^{(1)}_{\ell_N}+J^{(2)}_{\ell_N}. \qquad (1.2.11)$$

Учитывая аналитичность подинтегральной функции в (1.2.11) и асимптотику (1.1.5) функции Ханкеля при $|s|\to+\infty$, применяя теоремы о вычетах и стремив $N\to+\infty$, получим

$$J^{(1)}_\ell(k_\varepsilon,x,\xi)=4^{-1}(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\frac{|s|^{\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|\xi-x||s|)}{\lambda_\ell-k_\varepsilon^2+|s|^2}d|s|=$$

$$=i\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{8}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|\xi-x|\gamma_\ell(\varepsilon)), \qquad (1.2.12)$$

где $\gamma_\ell(\varepsilon)=\sqrt{\lambda_\ell-k_\varepsilon^2}$.

$$J^{(2)}_\ell=4^{-1}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\frac{|s|^{\frac{n}{2}}H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(|\xi-x||s|)}{\lambda_\ell-k_\varepsilon^2+|s|^2}d|s|=$$

$$=-\frac{i}{8}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}(-i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(-i|\xi-x|\gamma_\ell(\varepsilon)). \qquad (1.2.13)$$

Так как (см.[29], с.218)

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(-z)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z),$$

то из (1.2.11)-(1.2.13) следует, что

$$J_\ell(k_\varepsilon,x,\xi)=\frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|\xi-x|^{1-\frac{n}{2}}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|\xi-x|\gamma_\ell(\varepsilon)) \quad (1.2.14)$$

Далее, поступая так же, как и выше, при четном n получим для $J_\ell(k_\varepsilon,x,\xi)$ формулу (1.2.14). Подставляя (1.2.14) в (1.2.6), получим

$$u(k_\varepsilon,x,y)=\frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\infty}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}\varphi_\ell(y)\times$$

$$\times\int_{R_n}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell(\varepsilon))f_\ell(\xi)d\xi. \quad (1.2.15)$$

Подставляя теперь значение $f_\ell(\xi)$ из (1.2.7) в (1.2.15) и выделяя функцию $f(x)$, получим

$$u(k_\varepsilon,x,y)=\frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\infty}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}\varphi_\ell(y)\times$$

$$\times\int_{R_n}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell(\varepsilon))\int_{\Omega}f(\xi,z)\varphi_\ell(z)d\xi dz==\frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\int_{Ц}\dots\int\sum_{\ell=1}^{\infty}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}\varphi_\ell(y)\varphi_\ell(z)|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell(\varepsilon))f(\xi,z)dЦ.$$

(1.2.16)

Функция

$$G(k_\varepsilon,x-\xi,y,z)=\frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\sum_{\ell=1}^{\infty}(i\gamma_\ell(\varepsilon))^{\frac{n}{2}-1}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}\times$$

$$\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell(\varepsilon))\varphi_\ell(y)\varphi_\ell(z) \qquad (1.2.17)$$

есть функция Грина задачи (1.1.1)-(1.1.2) с комплексным параметром k_ε^2. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.2. *Функция Грина задачи (1.1.1)-(1.1.2) является аналитической функцией от* k, *за исключением счетного числа точек* $k = \pm\lambda_\ell^{1/2}$, $\ell = 1,2,\ldots$, *являющихся точками ветвления, и для нее имеет место разложение (1.2.17), где* λ_ℓ *- собственные значения оператора* L, $\varphi_\ell(y)$ *– соответствующие собственные функции.*

Из этой теоремы следует

Лемма 1.2.1. *Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) с комплексным параметром* k_ε^2 *представляется в виде*

$$u(k_\varepsilon, x, y) = \int\limits_{Ц}\!\!\ldots\!\!\int G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z) f(\xi, z) dЦ, \qquad (1.2.18)$$

оно единственное, где $G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z)$ *определяется формулой (1.2.17).*

Учитывая асимптотику (1.1.5) при $z\to\infty$ функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$, получаем, что ряд (1.2.17) и его производные, входящие в уравнение (1.1.1), сходятся равномерно относительно ε при $|x-\xi| > 0$, поэтому, переходя в (1.2.18) и в его производных к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем, что $u(k, x, y)$ является решением задачи (1.1.1)-(1.1.2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.3. *Для задачи (1.1.1)-(1.1.2) имеет место принцип предельного поглощения (при* $n = 1,2$; $k \neq \pm\lambda_\ell^{1/2}$, $\ell = 1,2,\ldots$*).*

§1.3. Принцип предельной амплитуды

Рассмотрим в $\bar{M}=(o,\infty)\times Ц$ нестационарную задачу, соответствующую задаче (1.1.1)-(1.1.2):

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)u(t,x,y)=f(x,y)\eta(t)\exp(i\omega t), \qquad (1.3.1)$$

$$u(0,x,y)=0, \quad \frac{\partial u(0,x,y)}{\partial t}=0, \qquad (1.3.2)$$

$$u(t,x,y)\big|_{\Gamma\times[0,+\infty)}=0, \qquad (1.3.3)$$

где $f(x,y)\in C_0^\infty(Ц)$, ω - вещественное число,

$$\eta(t)=\begin{cases}1 & при \quad t>0,\\ 0 & при \quad t<0.\end{cases}$$

Всюду в дальнейшем вместо $\eta(t)\exp(i\omega t)$ будем писать просто $\exp(i\omega t)$.

Определение 1.3.1. *Функцию* $u(t,x,y)\in$ $\in C^{2,2}((0,\infty)\times Ц)\bigcap C^{0,1}([0,\infty)\times \overline{Ц})$, *стремящаяся к нулю при* $x\to\infty$, *будем называть решением задачи (1.3.1)-(1.3.3), если она удовлетворяет уравнению (1.3.1) в* $(0,\infty)\times Ц$ *и условиям (1.3.2)-(1.3.3) в обычном смысле.*

Определение 1.3.2. *Будем говорить, что для задачи (1.3.1)-(1.3.3) имеет место принцип предельной амплитуды, если*

$$\lim_{t\to+\infty}u(t,x,y)\exp(-i\omega t)=\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$$

равномерно по x,y *в каждом компакте из* $Ц$, *где* $\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$ *- решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) при* $k=\omega$.

Считая $u(t,x,y)$ по t как обобщенную функцию над пространством D_+ (см.[40], с.113) и совершив в (1.3.1)-(1.3.3) преобразование Лапласа по t, получим следующую задачу:

$$(\Delta - k^2)\vartheta(k,x,y) = \frac{f(x,y)}{k - i\omega}, \tag{1.3.4}$$

$$\vartheta(k,x,y)\big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{1.3.5}$$

где $\vartheta(k,x,y) = \mathcal{L}\, u(t,x,y)$. $\operatorname{Re} k > 0$ и $\mathcal{L}$ есть обобщенное преобразование Лапласа по t. Используя результаты предыдущего параграфа, находим, что решение задачи (1.3.4)-(1.3.5) существует, единственно и имеет вид:

$$\vartheta(k,x,y) = \frac{i}{4}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} (i\sqrt{\lambda_\ell + k^2})^{\frac{n}{2}-1} \varphi_\ell(y) \times$$

$$\times \int_{R_n} |x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{\lambda_\ell + k^2}) \frac{f_\ell(\xi)}{k - i\omega} d\xi.$$

Решение задачи (1.3.1)-(1.3.3) определяется как обобщенное обратное преобразование Лапласа (см.[40], с.96) от $\vartheta(k,x,y)$

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \vartheta(k,x,y)\exp(kt)dk == \frac{(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}}{4} \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ \int_{R_n} \left[\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} (i\sqrt{\lambda_\ell + k^2})^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{\lambda_\ell + k^2}) \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} dk \right] \times \right.$$

$$\left. \times f_\ell(\xi)|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} d\xi \right\} \varphi_\ell(y), \tag{1.3.6}$$

где $\varepsilon > 0$ – любое положительное число. Обозначим через

$$G_\ell(t,x-\xi)=\int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|k_\ell)\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk, \qquad (1.3.7)$$

где $k_\ell=\sqrt{\lambda_\ell+k^2}$.

Имеет место следующая теорема

Теорема 1.3.1. *Если* $\omega\neq\pm\lambda_\ell^{1/2}$, $\ell=1,2,3,...,$ $f(x,y)\in C_0^\infty(Ц)$, *то для задачи (1.3.1)-(1.3.3) имеет место принцип предельной амплитуды, т.е. при* t→+∞

$$u(t,x,y)=\overline{\vartheta}(\omega,x,y)\exp(i\omega t)+(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}i^{\frac{3n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}\times$$
$$\times\sum_{\ell=1}^{\infty}\psi(\ell,t,\omega)f_\ell\varphi_\ell(y)+O(t^{-\frac{n}{2}-1}),$$

равномерно по x,y *в каждом компакте из* Ц, *где* $\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$ *есть решение задачи (1.1.1)-(1.1.2), выделенное принципом предельного поглощения, ряд сходится равномерно по* $y\in\Omega,\ t\in[0,+\infty)$, $f_\ell=\int\limits_{R_n}f_\ell(\xi)d\xi$, *а* $\Psi(\ell,t,\omega)$ *указана ниже.*

Доказательство. Для этой цели изучим сперва поведение $G_\ell(t,x-\xi)$ при $t\to+\infty$. Подинтегральная функция в (1.3.6) имеет точки ветвления в точках $k=\pm i\lambda_\ell^{1/2}$ (при $n=2$ логарифмические, а при $n>2$ алгебраические). Устроим на плоскости k разрез как указано на рис.1.

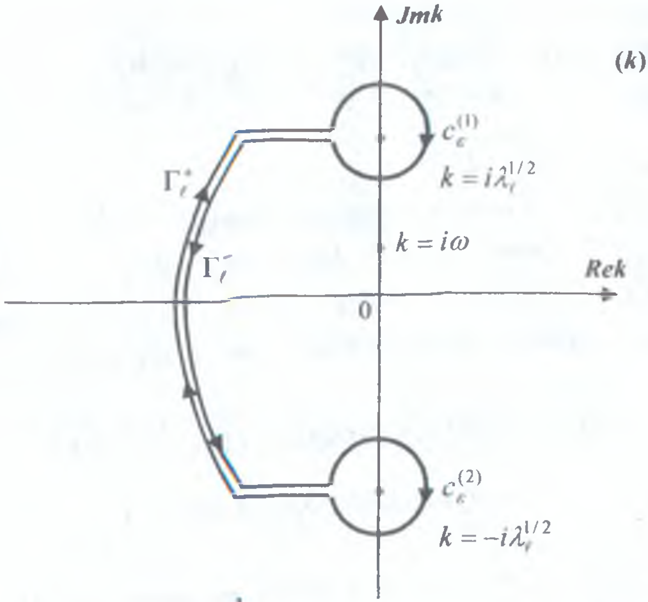


рис.1

Для $(\lambda_\ell + k^2)^{\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}$ выбираем ту ветвь, которая положительна, когда аргумент положителен; а для логарифма берем ту ветвь, которая вещественна, когда аргумент положителен. Так как подинтегральная функция при $\operatorname{Re} k \geq 0$ растет на бесконечности не быстрее полинома, то, используя теорему об обобщенном преобразовании Лапласа, (см.[40], с.113) можно показать, что контур интегрирования в (1.3.7) можно заменить контуром P_ℓ, который состоит из отрезка $[\varepsilon - i(\lambda_\ell^{1/2} + \delta), \varepsilon + i(\lambda_\ell^{1/2} + \delta)]$, параллельного мнимой оси, и лучей, лежащих в левой полуплоскости и выходящих из точек $k = \pm i(\lambda_\ell^{1/2} + \delta)$, где $\delta > 0$ – любое малое число. При больших t интеграл по контуру P_ℓ сходится абсолютно.

Для применения в дальнейшем метода перевала (см.[38], с.61) участки разреза вблизи точек $k = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$

будем считать параллельными вещественной оси. Обозначим $\Gamma_\ell = \Gamma_\ell^+ \cup \Gamma_\ell^- \cup C_\varepsilon^{(1)} \cup C_\varepsilon^{(2)}$, где $C_\varepsilon^{(1)}$, $C_\varepsilon^{(2)}$, C_ε окружности радиуса ε с центрами соответственно в точках $k = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$, $k = 0$; Γ_ℓ^+, Γ_ℓ^- - берега разреза.

Пусть $\omega = \lambda_\ell^{1/2}$. Применяя к (1.3.7) с контуром интегрирование P_ℓ теорему Коши для больших t, получим

$$G_\ell(t, x-\xi) = 2\pi i(i\theta_\ell)^{\frac{n}{2}-1} \times$$
$$\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\theta_\ell)\exp(i\omega t) + G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi), \qquad (1.3.9)$$

где

$$\theta_\ell = \sqrt{\lambda_\ell - \omega^2},$$

а

$$G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi) = \int_{\Gamma_\ell} (ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|k_\ell)\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk.$$

Изучим теперь $G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi)$ при $t \to +\infty$.

Пусть n – нечетное число. Тогда, используя соотношение

$$H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z) = \frac{j_{-(\frac{n}{2}-1)}(z) + \exp(i\pi(\frac{n}{2}-1))j_{\frac{n}{2}-1}(z)}{i\sin\pi(\frac{n}{2}-1)} \qquad (1.3.10)$$

(см.[29], с.175) и то, что $z^{\frac{n}{2}-1} j_{-(\frac{n}{2}-1)}(z)$ - целая функция, получим

$$G_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=\int_{\Gamma_\ell}\frac{(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}}{k-i\omega}j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|k_\ell)\exp(kt)dk.$$

Так как подинтегральная функция в выражении $G_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)$ ограничена, то при $\varepsilon\to 0$ интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(j)}$, $j=1,2$ стремятся к нулю равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Так как для нечетного n

$$(-z)^{\frac{n}{2}-1}j_{\frac{n}{2}-1}(-z)=-z^{\frac{n}{2}-1}j_{\frac{n}{2}-1}(z),$$

и учитывая значение функции $(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|k_\ell)$ на берегах разреза, получим

$$G_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=2\int_{\Gamma_\ell^+}\frac{(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}}{k-i\omega}j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|k_\ell)\exp(kt)dk.$$

Используя разложения $j_\nu(z)$ в ряд для нецелых значений ν и ограничиваясь только первым членом разложения (остальные члены разложения при больших t дадут величины большего порядка малости, чем первое слагаемое), будем иметь

$$G_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=\frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{\Gamma_\ell^+}\frac{(ik_\ell)^{n-2}}{k-i\omega}\exp(kt)dk. \qquad (1.3.11)$$

Представим (1.3.11) в виде

$$G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi) = \frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left\{ \int\limits_{-a+i\lambda_\ell^{1/2}}^{i\lambda_\ell^{1/2}} + \int\limits_{-i\lambda_\ell^{1/2}}^{-a-i\lambda_\ell^{1/2}} + \int\limits_{-a-i\lambda_\ell^{1/2}}^{-a+i\lambda_\ell^{1/2}} \right\} \times$$

$$\times \frac{(i\sqrt{k^2+\lambda_\ell})^{n-2}}{k-i\omega} \exp(kt)dk \equiv \frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[J_1(t) + J_2(t) + J_3(t)\right],$$

где $a > 0$. Оценивая по модулю, получаем, что третий интеграл в этой сумме при $t \to +\infty$ экспоненциально убывает

$$J_3(t) = O(\lambda_\ell^{\frac{n}{2}} \exp(-at)). \qquad (1.3.12)$$

Рассмотрим теперь первые два интеграла.

Сделаем замену $k - i\lambda_\ell^{1/2} = -\tau$ в первом интеграле и $k + i\lambda_\ell^{1/2} = -\tau$ во втором интеграле.

Тогда

$$J_1(t) = (-1)^{\frac{n}{2}} i^n \exp(i\lambda_\ell^{1/2} t) \int\limits_0^a \frac{\tau^{\frac{n}{2}-1}(2i\lambda_\ell^{1/2} - \tau)^{\frac{n}{2}-1}}{i\lambda_\ell^{1/2} - i\omega - \tau} \exp(-\tau t) d\tau.$$

К этому интегралу при $t \to +\infty$ применим теорему 1.1.1. Тогда

$$J_1(t) = 2^{\frac{n}{2}-1} i^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \lambda_\ell^{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)} \frac{\exp(i\lambda_\ell^{1/2} t)}{\lambda_\ell^{1/2} - \omega} \left[t^{-\frac{n}{2}} + O\left(t^{-\frac{n}{2}-1} \right) \right]. \qquad (1.3.13)$$

Аналогичным образом, при $t \to +\infty$ для $J_2(t)$ получим

$$J_2(t) = -2^{\frac{n}{2}-1} i^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \lambda_\ell^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)} \frac{\exp(-i\lambda_\ell^{1/2} t)}{\lambda_\ell^{1/2} + \omega} \left[t^{-\frac{n}{2}} + O\left(t^{-\frac{n}{2}-1} \right) \right]. \quad (1.3.14)$$

Из (1.3.11)-(1.3.14) следует, что при $t \to +\infty$

$$G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi) = 2|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1} i^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} [\psi(\ell, t, \omega) + O(t^{-1})], \quad (1.3.15)$$

где

$$\psi(\ell,t,\omega) = \lambda_\ell^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)} \left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \exp(i\lambda_\ell^{1/2} t)}{\lambda_\ell^{1/2} - \omega} - \frac{\exp(-i\lambda_\ell^{1/2} t)}{\lambda_\ell^{1/2} + \omega} \right]$$

равномерно по $|x-\xi|$.

Пусть теперь n – четное число. Тогда $z^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ является аналитической функцией от z с логарифмической точкой ветвления в точке $z = 0$ (см.[29], с.177). Так как $z^{\frac{n}{2}-1} j_{\frac{n}{2}-1}(z)$ будет целой функцией в этом случае, то получим

$$G_{\Gamma_\ell}(t, x-\xi) = \frac{2i}{\pi} \int_{\Gamma_\ell} (ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1} j_{\frac{n}{2}-1}\left(i|x-\xi|k_\ell\right) \ln\left(i \frac{|x-\xi| k_\ell}{2} \right) \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} dk.$$

В силу того, что подинтегральная функция в выражении G_{Γ_ℓ} ограничена в ε окрестности точек $k = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$, то при $\varepsilon \to 0$ интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ стремятся к нулю равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Далее, учитывая значение подинтегральной функции на берегах разреза $(-i\lambda_\ell^{1/2}, i\lambda_\ell^{1/2})$ и ограничиваясь только первым членом разложения, получим

$$G_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=\frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{\Gamma_\ell^+}(ik_\ell)^{n-2}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk+O(t^{-n-1}). \quad (1.3.16)$$

Значит, для G_{Γ_ℓ} и в случае четных n получили такое же выражение (1.3.11), как и в случае нечетных n. Поступая так же, как и выше, получаем, что при $t\to+\infty$ для четных n имеет место асимптотика (1.3.15). Из сказанного и из (1.3.9), (1.3.15) при $t\to+\infty$ получаем

$$G_\ell(t,x-\xi)=2\pi i(i\theta_\ell)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\theta_\ell)\exp(i\omega t)+$$

$$+2|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}i^{-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}[\psi(\ell,t,\omega)+O(t^{-1})]. \quad (1.3.17)$$

Подставляя выражение $G_\ell(t,x-\xi)$ из (1.3.17) в (1.3.6), при $t\to+\infty$ получаем

$$u(t,x,y)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4}\exp(i\omega t)\sum_{\ell=1}^{\infty}\varphi_\ell(y)\times$$

$$\times\int_{R_n}(i\theta_\ell)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\theta_\ell)f_\ell(\xi)|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}d\xi+$$

$$+\frac{(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}}{2}i^{-\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\infty}\psi(\ell,t,\omega)f_\ell\varphi_\ell(y)+O(t^{-\frac{n}{2}-1}), \quad (1.3.18)$$

где

$$f_\ell=\int_{R_n}f_\ell(\xi)d\xi$$

равномерно по x, y в каждом компакте из $Ц$. Из (1.2.15) получаем, что первая сумма в (1.3.18) есть решение задачи (1.1.1)-(1.1.2), выделенное принципом предельного поглощения. Таким образом, при $t \to +\infty$ для решения задачи (1.3.1)-(1.3.3) получаем следующую асимптотику

$$u(t,x,y) = \overline{\vartheta}(\omega,x,y)\exp(i\omega t) +$$

$$+\frac{(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}}{2} i^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi(\ell,t,\omega) f_\ell \varphi_\ell(y) + O(t^{-\frac{n}{2}-1}). \quad (1.3.19)$$

Отметим, что ряд в (1.3.19) сходится равномерно по $y \in \Omega$. Теорема 1.3.1 доказана.

Докажем теперь сходимость ряда в (1.3.19).

Введем обозначение. Через $H^{(\ell)}(\Omega)$ будем обозначать пространство функций, которые вместе со всеми обобщенными производными до порядка ℓ включительно принадлежат $L_2(\Omega)$.

Имеет место следующая

Лемма 1.3.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{\frac{n}{2}+\left[\frac{m}{2}\right]+m-1}$. *Тогда ряд*

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \psi(\ell,t,\omega) f_\ell \varphi_\ell(y) \quad (1.3.20)$$

сходится равномерно по $y \in \Omega$ *и* $t \in [0,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_\ell(y)$ собственная функция задачи Дирихле для оператора Лапласа. Тогда известно, что при условии леммы обобщенные собственные функции являются классическими собственными функциями. Поэтому, если

$$\Delta\varphi_\ell(y) = \lambda_\ell \varphi_\ell(y), \qquad \varphi_\ell(y)\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

то

$$\varphi_\ell(y)\big|_{\partial\Omega}=0,\ \Delta\varphi_\ell(y)\big|_{\partial\Omega}=0,\dots,\Delta^{\left[\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}\right]\right]}\varphi_\ell(y)\Big|_{\partial\Omega}=0. \qquad (1.3.21)$$

Тогда по лемме 3 из [41] (с.229)

$$\left\|\varphi_\ell(y)\right\|_{H_{(\Omega)}^{[\frac{m}{2}]+1}}\le C\left\|\Delta^{\frac{[\frac{m}{2}]+1}{2}}\varphi_\ell(y)\right\|_{l_2(\Omega)}, \qquad (1.3.22)$$

если $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ - четное число или

$$\left\|\varphi_\ell(y)\right\|_{H_{(\Omega)}^{([\frac{m}{2}]+1)}}\le C\left\|\Delta^{\frac{1}{2}[\frac{m}{2}]}\varphi_\ell(y)\right\|_{H^{(1)}(\Omega)}, \qquad (1.3.23)$$

если $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ - нечетное число, где C от ℓ не зависит. Так как

$$\Delta^{\nu}\varphi_\ell(y)=\lambda_\ell^{\nu}\varphi_\ell(y), \qquad (1.3.24)$$

с соответствующими граничными условиями (1.3.21) и

$$\left\|\varphi_\ell(y)\right\|^2_{H^{(1)}(\Omega)}=\int_\Omega\left|grad\varphi_\ell(y)\right|^2dy+\int_\Omega\varphi_\ell^2(y)dy=$$

$$=\int_\Omega\Delta\varphi_\ell(y)\varphi_\ell(y)dy+\int_\Omega\varphi_\ell^2(y)dy=\lambda_\ell+1. \qquad (1.3.25)$$

Поэтому из (1.3.22)-(1.3.24) следует

$$\left\|\varphi_\ell(y)\right\|_{H_{(\Omega)}^{([\frac{m}{2}]+1)}}\le C_1\lambda_\ell^{\frac{[\frac{m}{2}]+1}{2}}\left\|\varphi_\ell(y)\right\|_{l_2(\Omega)},$$

если $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ - четное или

$$\|\varphi_\ell(y)\|_{H^{([\frac{m}{2}]+1)}(\Omega)} \le C_2 \lambda_\ell^{\frac{1}{2}[\frac{m}{2}]} \|\varphi_\ell(y)\|_{H^{(1)}(\Omega)},$$

если $\left[\frac{m}{2}\right]+1$ - нечетное. Учитывая (1.3.25), в обоих случаях имеем

$$\|\varphi_\ell(y)\|_{H^{([\frac{m}{2}]+1)}(\Omega)} \le C \lambda_\ell^{\frac{1}{2}([\frac{m}{2}]+1)}. \tag{1.3.26}$$

Так как по теореме вложения С.Л.Соболева

$$\|\varphi_\ell(y)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C \|\varphi_\ell(y)\|_{H^{([\frac{m}{2}]+1)}(\Omega)},$$

то из (1.3.26) следует

$$\|\varphi_\ell(y)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C \lambda_\ell^{\frac{[\frac{m}{2}]+1}{2}}.$$

Установим теперь сходимость ряда (1.3.20)

$$\left\|\sum_{\ell=1}^{\infty} \psi(\ell,t,\omega)\varphi_\ell(y) f_\ell\right\|_{C(\overline{\Omega})} \le$$

$$\le \sum_{\ell=1}^{\infty} |\psi(\ell,t,\omega)| |f_\ell| \|\varphi_\ell(y)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}[\frac{m}{2}]-\frac{1}{2}} |f_\ell|.$$

Известно, что (см. теорема 5 из [41], с.190)

$$C_0 \ell^{\frac{2}{m}} \le \lambda_\ell \le C_1 \ell^{\frac{2}{m}}, \tag{1.3.27}$$

Применяя элементарное неравенство, получим

$$\left\| \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi(\ell,t,\omega)\varphi_\ell(y) f_\ell \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le C\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell^{-m} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell^{\frac{n}{2}+[\frac{m}{2}]+m-1} |f_\ell|^2 \right), \quad (1.3.28)$$

где C_0 и C_1 – постоянные.

Положим

$$F(y) = \int_{R_n} f(\xi, y) d\xi, \quad F_s = \int_{\Omega} F(y)\varphi_s(y) dy.$$

Тогда в силу условия на $f(\xi, y)$ функция $F(y) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Так как $\partial\Omega \in C^{\frac{n}{2}+[\frac{m}{2}]+m-1}$, то, применяя теорему 8 из [41] (с.230), получим

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\lambda_\ell|^{\nu} F_\ell^2 \le C \|F\|^2_{H^{(\nu)}(\Omega)}. \quad (1.3.29)$$

Подставляя выражение $F(y)$ в F_ℓ и используя теорему Фубини, получим

$$F_\ell = \int_{R_n} \left\{ \int_{\Omega} f(\xi, y)\varphi_\ell(y) dy \right\} d\xi = \int_{R_n} f_\ell(\xi) d\xi = f_\ell, \quad (1.3.30)$$

где

$$f_\ell(\xi) = \int_{\Omega} f(\xi, y)\varphi_\ell(y) dy.$$

Тогда из (1.3.27), (1.3.29), (1.3.30) следует, что оба ряда в правой части (1.3.28) сходятся. Лемма доказана.

В теореме 1.3.1 был рассмотрен случай $\omega \ne \pm\lambda_{\ell_0}^{1/2}$. Изучим теперь резонансный случай, т.е. случай, когда $\omega = \pm\lambda_{\ell_0}^{1/2}$. Имеет место следующая

Теорема 1.3.2. *Пусть* $\omega = \pm\lambda_{\ell_0}^{1/2}$ *(ℓ_0 – фиксированное натуральное число) и* $n \ge 3$. *Тогда для задачи (1.3.1)-*

(1.3.3) имеет место принцип предельной амплитуды, т.е. при $t \to +\infty$

$$\exp(-i\omega t)u(t,x,y) =$$

$$= \overline{\vartheta}(\omega,x,y) + (2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)} i^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\omega}{t}\right)^{\frac{n}{2}-1} f_{\ell_0}\varphi_{\ell_0}(y) + O(t^{-\frac{n}{2}}),$$

равномерно по x, y в каждом компакте из Ц, где $\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$ есть решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) при $k=\omega$, выделенное принципом предельного поглощения.

Доказательство. Будем изучать поведение $G_{\ell_0}(t,x-\xi)$ при $t \to +\infty$. Изучение же $G_\ell(t,x-\xi)$ при $\ell \neq \ell_0$ приведено в доказательстве теоремы 1.3.1.

Пусть n≥3 – нечетное число. И для определенности возьмем $\omega = \lambda_{\ell_0}^{1/2}$. Так как в этом случае $z^{\frac{n}{2}-1} j_{-(\frac{n}{2}-1)}(z)$ есть целая функция, то из (1.3.10) получаем

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi) = \frac{2\pi i 2^{\frac{n}{2}-1}|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)i(-1)^{\frac{n+1}{2}}}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t) +$$

$$+\int_{\Gamma_{\ell_0}} \frac{(i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1}}{k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}} j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})\exp(kt)dk.$$

Разлагая $j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})$ в ряд и ограничиваясь только первым членом разложения, получим

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n}{2}}|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)+\frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}i^{n-2}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_{\ell_0}}(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)dk+O(t^{-\frac{n}{2}-1}).\quad(1.3.31)$$

Так как подинтегральная функция в (1.3.31) имеет суммируемую особенность в точках $k=\pm\lambda_{\ell_0}^{1/2}$, то при $\varepsilon\to 0$ интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ стремятся к нулю. Учитывая значение подинтегральной функции на берегах разреза, получим

$$\int\limits_{\Gamma_{\ell_0}}(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)dk=$$

$$=2\int\limits_{\Gamma_{\ell_0}^{+}}(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)dk\equiv 2J(t)$$

Представим $J(t)$ в виде

$$J(t)=\left\{\int\limits_{-a+i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}^{i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}+\int\limits_{-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}^{-a-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}+\int\limits_{-a-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}^{-a+i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}\right\}(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-2}\times$$

$$\times(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)dk\equiv J_1(t)+J_2(t)+J_3(t).\quad(1.3.32)$$

Применим к интегралам $J_1(t)$, $J_2(t)$ теорему 1.1.1 при $t\to+\infty$, а интеграл $J_3(t)$ оценим по модулю.

Тогда

$$J_1(t)=(-1)^{\frac{3n}{4}-\frac{1}{2}}2^{\frac{n}{2}-1}\lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)}\Gamma(\frac{n}{2}-1)\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)t^{-\frac{n}{2}+1}+O(t^{-\frac{n}{2}}),\quad(1.3.33)$$

$$J_2(t)=(-1)^{\frac{3n}{4}-1}2^{\frac{n}{2}-2}\lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-2)}\Gamma(\frac{n}{2})\exp(-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)+O(t^{-\frac{n}{2}-1}),\quad (1.3.34)$$

$$|J_3(t)|\le C\exp(-at).\quad (1.3.35)$$

Из (1.3.31)- (1.3.35) следует, что при $t\to+\infty$

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{\frac{n}{2}}\pi|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(-\frac{n}{2}+2)}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)+$$

$$+\frac{4i^{\frac{n}{2}-1}}{n-2}\lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}t^{-\frac{n}{2}+1}+O(t^{-\frac{n}{2}}),\quad (1.3.36)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Отметим, что первое слагаемое в (1.3.36) не что иное, как значение функции

$$2\pi i(i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}\exp(kt)$$

при $k=i\lambda_{\ell_0}^{1/2}$. Поэтому

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=2\pi i(i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})\exp(kt)\Big|_{k=i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}+$$

$$+\frac{4i^{\frac{n}{2}-1}}{n-2}\lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}t^{-\frac{n}{2}+1}+O(t^{-\frac{n}{2}}).\quad (1.3.37)$$

Для остальных $G_\ell(t,x-\xi)$ при $\ell\ne\ell_0$ справедлива асимптотика (1.3.17).

Пусть теперь $4 \le n$ – четное число. Тогда так же, как и в доказательстве теоремы 1.3.1, учитывая разложение функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$, получим

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=\int\limits_{\Gamma_{\ell_0}}\left[\frac{2i}{\pi}(i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1}j_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})\times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}}{2}-\frac{i}{\pi}2^{\frac{n}{2}-1}|x-\xi|(\frac{n}{2}-2)!\right]\frac{\exp(kt)}{k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}\,dk.$$

Разлагая $j_{\frac{n}{2}-1}(z)$ и ограничиваясь только первым членом разложения, получим

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}-2)!|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}\exp(i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)+$$

$$+\frac{i^n|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_{\Gamma^+_{\ell_0}}\exp(kt)(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{\frac{n}{2}-2}(k+i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{\frac{n}{2}-1}dk. \quad (1.3.38)$$

Далее, поступая так же, как и при оценке интеграла (1.3.31) при $t\to+\infty$, получим

$$\int\limits_{\Gamma^+_{\ell_0}}\exp(kt)(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{\frac{n}{2}-2}(k+i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{\frac{n}{2}-1}dk=$$

$$=i^{\frac{3n}{2}-1}(2\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{\frac{n}{2}-1}\exp(i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)\Gamma(\frac{n}{2}-1)t^{-\frac{n}{2}+1}+O(t^{-\frac{n}{2}}). \quad (1.3.39)$$

Из (1.3.38)-(1.3.39) при $t\to+\infty$ получаем

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t,x-\xi)=2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}-2)!|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}\exp(i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)+$$

$$+\frac{4}{n-2} i^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)} |x-\xi|^{\frac{n}{2}-1} \exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2} t) t^{-\frac{n}{2}+1} + O(t^{-\frac{n}{2}}), \quad (1.3.40)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Отметим, что первое слагаемое в (1.3.40) есть значение функции

$$2\pi i (i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}) \exp(kt)$$

при $k = i\lambda_{\ell_0}^{1/2}$. Поэтому

$$G_{\Gamma_{\ell_0}}(t, x-\xi) = 2\pi i (i\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}) \exp(kt)\Big|_{k=i\lambda_{\ell_0}^{1/2}} +$$

$$+\frac{4}{n-2} i^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)} |x-\xi|^{\frac{n}{2}-1} \exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2} t) t^{-\frac{n}{2}+1} + O(t^{-\frac{n}{2}}). \quad (1.3.41)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Для остальных $G_\ell(t, x-\xi)$ при $\ell \neq \ell_0$ справедлива асимптотика (1.3.17). Подставляя значения $G_\ell(t, x-\xi)$ из (1.3.17), (1.3.37) и (1.3.41) в (1.3.6), при $t \to +\infty$ получим

$$\exp(-i\omega t) u(t, x, y) = \overline{\vartheta}(\omega, x, y) +$$

$$+\frac{(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}}{n-2} i^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{\ell_0}^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)} t^{-\frac{n}{2}+1} f_{\ell_0} \varphi_{\ell_0}(y) + O(t^{-\frac{n}{2}}),$$

равномерно по x, y в каждом компакте из $Ц$, где $\overline{\vartheta}(\omega, x, y)$ есть решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) при $k = \omega$, выделенное принципом предельного поглощения.

Рассмотрим теперь случай $n < 3$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1.3.2. *Пусть* L_ε *есть контур, указанный на рис.2. Тогда для любого* $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{L_\varepsilon} \frac{\ln(k - id_1)}{k - id_1} \exp(kt) dk =$$

$$= 2\pi i \exp(id_1 t) \ln t - 2\pi^2 \exp(id_1 t) - 2\pi i \exp(id_1 t) \int_{-\infty}^{0} \exp(y) \ln|y| dy.$$

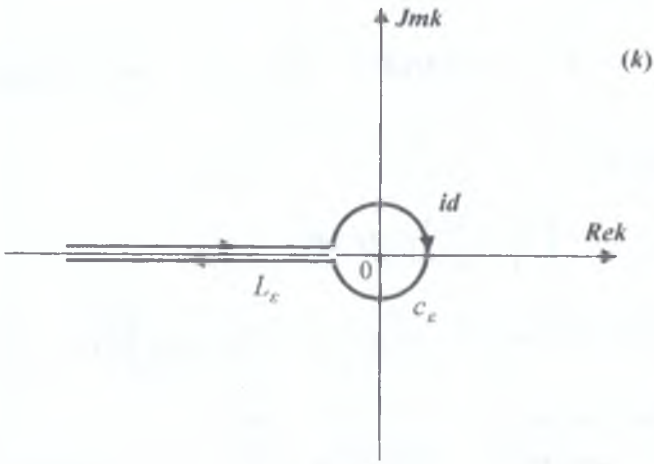


рис.2

Доказательство. Интегрируя интеграл по контуру L_ε и учитывая обход в окрестности точки $k = id_1$, получим

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{\ln(k-id_1)}{k-id_1}\exp(kt)dk = -\frac{t}{2}\int_{L_\varepsilon} \ln^2(k-id_1)\exp(kt)dk.$$

Так как подинтегральная функция в последнем интеграле имеет суммируемую особенность в точке $k = id_1$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{\ln(k-id_1)}{k-id_1}\exp(kt)dk = -\frac{t}{2}\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty+id_1}^{id_1} \ln^2(k-id_1)\exp(kt)dk + \int_{id_1}^{-\infty+id_1} \left(\ln(k-id_1)-2\pi i\right)^2 \exp(kt)dk\right].$$

Отсюда

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{\ln(k-id_1)}{k-id_1}\exp(kt)dk =$$

$$= 2\pi i\exp(id_1 t)\ln t - 2\pi^2\exp(id_1 t) - 2\pi i\exp(id_1 t)\int_{-\infty}^{0}\exp(y)\ln|y|dy.$$

Лемма доказана.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $\omega = \pm i\lambda_{r_0}^{1/2}$, $n = 1,2$. *Тогда для решения задачи (1.3.1)-(1.3.3) принцип предельной амплитуды не имеет места и для* $u(t,x,y)$ *при* $t \to +\infty$ *справедлива следующая асимптотика*

$$\exp(i\omega t)u(t,x,y)=\begin{cases}\dfrac{i^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\omega^{-\frac{1}{2}}f_{\ell_0}\varphi_{\ell_0}(y)t^{\frac{1}{2}}+O(1), & \text{если} \quad n=1,\\ -\dfrac{1}{(2\pi)^2}\ln t\, f_{\ell_0}\varphi_{\ell_0}(y)+O(1), & \text{если} \quad n=2,\end{cases}$$

равномерно по x, y *в каждом компакте из* Ц .

Доказательство. Пусть $n=1$. Тогда

$$H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp(iz)$$

Поэтому при $\omega=\lambda^{1/2}_{\ell_0}$

$$G_\ell(t,x-\xi)=i^{-1}\sqrt{\frac{2}{\pi|x-\xi|}}\int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_\ell}+kt)}{\sqrt{k^2+\lambda_\ell}\,(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})}dk. \quad (1.3.42)$$

Устроим на плоскости k разрез $\left(-i\lambda^{1/2}_\ell, i\lambda^{1/2}_\ell\right)$, как указано выше, и для корня $\sqrt{k\pm i\lambda^{1/2}_\ell}$ берем ту ветвь, которая положительна при $\arg(k\pm i\lambda^{1/2}_\ell)=0$. Пусть $\ell\neq\ell_0$. Так же, как и в доказательстве теоремы 1.3.1, учитывая хорошее убывание подинтегральной функции в левой полуплоскости и применяя теорему Коши, получим

$$G_\ell(t,x-\xi)=2\sqrt{\frac{2\pi}{|x-\xi|}}\frac{\exp(-|x-\xi|\sqrt{\lambda_\ell-\lambda_{\ell_0}}+i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)}{\sqrt{\lambda_\ell-\lambda_{\ell_0}}}+$$

$$+i^{-1}\sqrt{\frac{2}{\pi|x-\xi|}}\int\limits_{\Gamma_\ell}\frac{\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_\ell}+kt)}{\sqrt{k^2+\lambda_\ell}\,(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})}dk. \quad (1.3.43)$$

Рассмотрим при $t\to+\infty$ интеграл

$$J_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=\int\limits_{\Gamma_\ell}\frac{\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_\ell}+kt)}{\sqrt{k^2+\lambda_\ell}\,(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})}dk.$$

Подинтегральная функция в выражении $J_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)$ имеет суммируемую особенность в точках $k=\pm i\lambda_\ell^{1/2}$. Поэтому при $\varepsilon\to 0$ интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ стремятся к нулю равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте. Учитывая значение подинтегральной функции на берегах разреза, получим

$$J_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\left(-|x-\xi|\right)^{2\ell}}{(2\ell)!}\int\limits_{\Gamma_\ell^+}\left(\sqrt{k^2+\lambda_\ell}\right)^{2\ell-1}\frac{\exp(kt)}{k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}dk. \qquad (1.3.44)$$

Основной вклад в $J_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)$ при $t\to+\infty$ дает первое слагаемое. Вклад остальных членов ряда (1.3.44) при $t\to+\infty$ имеет больший порядок малости. Тогда при $t\to+\infty$

$$J_{\Gamma_\ell}(t,x-\xi)=\sqrt{2\pi}\,\lambda_\ell^{-\frac{1}{4}}\times$$

$$\times\left[\frac{i^{-\frac{1}{2}}\exp(i\lambda_\ell^{1/2}t)}{\lambda_{\ell_0}^{1/2}-\lambda_\ell^{1/2}}-\frac{i^{\frac{1}{2}}\exp(-i\lambda_\ell^{1/2}t)}{\lambda_{\ell_0}^{1/2}+\lambda_\ell^{1/2}}\right]t^{-\frac{1}{2}}+O(t^{-\frac{3}{2}}), \qquad (1.3.45)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте.

Из (1.3.43) и (1.3.45) при $t\to+\infty$ получаем

$$G_{\ell}(t,x-\xi)=2\sqrt{\frac{2\pi}{|x-\xi|}}\,\frac{\exp(-|x-\xi|\sqrt{\lambda_{\ell}-\lambda_{\ell_0}}+i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)}{\sqrt{\lambda_{\ell}-\lambda_{\ell_0}}}+|x-\xi|^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[2i^{-\frac{1}{2}}\lambda_{\ell}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{i^{-1}\exp(i\lambda_{\ell}^{1/2}t)}{\lambda_{\ell_0}^{1/2}-\lambda_{\ell}^{1/2}}-\frac{\exp(-i\lambda_{\ell}^{1/2}t)}{\lambda_{\ell_0}^{1/2}+\lambda_{\ell}^{1/2}}\right)t^{-\frac{1}{2}}+O(t^{-\frac{3}{2}})\right], \qquad (1.3.46)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте из R_n.

Рассмотрим теперь $G_{\ell_0}(t,x-\xi)$. Представим ее в виде

$$G_{\ell_0}(t,x-\xi)=i^{-1}\sqrt{\frac{2}{\pi|x-\xi|}}\times$$

$$\times\left\{\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\left[\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})-1\right]\exp(kt)}{(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{3/2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{1/2}}dk+\right.$$

$$\left.+\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\frac{\exp(kt)dk}{(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{3/2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{1/2}}\right\}\equiv$$

$$\equiv i^{-1}\sqrt{\frac{2}{\pi|x-\xi|}}\left(J_{\ell_0}^{(1)}(t)+J_{\ell_0}^{(2)}(t)\right) \qquad (1.3.47)$$

Разлагая $\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})$ в ряд, получим

$$J_{\ell_0}^{(1)}(t,x-\xi)\equiv\int_{\Gamma_{\ell_0}}\frac{\left[\exp(-|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})-1\right]\exp(kt)}{(k-i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{3/2}(k+i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{1/2}}dk=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-|x-\xi|)^{\nu}}{\nu!}J_{\ell_0\nu}^{(1)}(t), \qquad (1.3.48)$$

где

$$J^{(1)}_{t_0,\nu}(t)=\int\limits_{\Gamma_{t_0}}(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})^{\frac{\nu-3}{2}}(k+i\lambda^{1/2}_{t_0})^{\frac{\nu-1}{2}}\exp(kt)dk.$$

Для нечетных ν

$$J^{(1)}_{t_0,1}(t)=2\pi i\exp(i\lambda^{1/2}_{t_0}t),\quad J^{(1)}_{t_0,\nu}(t)=0,\quad \nu\ge 3. \qquad (1.3.49)$$

Применяя теорему 1.1.1 к интегралу $J^{(1)}_{t_0,\nu}(t)$ для четных ν при $t\to+\infty$, получим

$$J^{(1)}_{t_0,\nu}(t)=O(t^{\frac{1-\nu}{2}}). \qquad (1.3.50)$$

Представим $J^{(2)}_{t_0}(t)$ в виде

$$J^{(2)}_{t_0}(t)=\exp(i\lambda^{1/2}_{t_0}t)\left[\int\limits_{\Gamma_{t_0}}\frac{\left[\exp(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})t-1\right]dk}{(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})^{3/2}(k+i\lambda^{1/2}_{t_0})^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Gamma_{t_0}}\frac{dk}{(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})^{3/2}(k+i\lambda^{1/2}_{t_0})^{1/2}}\right]\equiv\exp(i\lambda^{1/2}_{t_0}t)\left[J^{(2)}_{t_0,I}(t)+J^{(2)}_{t_0,II}(t)\right] \qquad (1.3.51)$$

Можно показать, что

$$J^{(2)}_{t_0,II}(t)=0, \qquad (1.3.52)$$

$$J^{(2)}_{t_0,I}(t)=2\int\limits_{\Gamma^{+}_{t_0}}\frac{\left[\exp(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})t-1\right]}{(k-i\lambda^{1/2}_{t_0})^{3/2}(k+i\lambda^{1/2}_{t_0})^{1/2}}dk.$$

Представим

$$J^{(2)}_{\ell_0,J}(t)=2\left[\int\limits_{-a+i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}^{i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}+\int\limits_{-a-i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}^{-a+i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}+\int\limits_{-i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}^{-a-i\lambda^{1/2}_{\ell_0}}\right]\frac{\left[\exp(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})t-1\right]}{(k-i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{3/2}(k+i\lambda^{1/2}_{\ell_0})^{1/2}}dk=$$

$$=2\left[J^{(2)}_{\ell_0,J_1}(t)+J^{(2)}_{\ell_0,J_2}(t)+J^{(2)}_{\ell_0,J_3}(t)\right]. \qquad (1.3.53)$$

Интегрируя в $J^{(2)}_{\ell_0,J_1}(t)$ по частям, затем к полученному интегралу применяя теорему 1.1.1 при $t\to+\infty$, получим

$$J^{(2)}_{\ell_0,J_1}(t)=-\sqrt{2\pi i\lambda^{-1/2}_{\ell_0}}\,t^{\frac{1}{2}}+O(1). \qquad (1.3.54)$$

Оценивая по модулю $J^{(2)}_{\ell_0,J_2}(t)$ и применяя теорему 1.1.1 к интегралу $J^{(2)}_{\ell_0,J_3}(t)$, получим

$$\left|J^{(2)}_{\ell_0,J_2}(t)\right|\le C,\quad J^{(2)}_{\ell_0,J_3}(t)=O(t^{-\frac{1}{2}}). \qquad (1.3.55)$$

Из (1.3.47)-(1.3.55) следует, что при $t\to+\infty$

$$G_{\ell_0}(t,x-\xi)=4i^{\frac{3}{2}}|x-\xi|^{-\frac{1}{2}}\lambda_{\ell_0}^{-\frac{1}{4}}\exp(i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)t^{\frac{1}{2}}+O(1) \qquad (1.3.56)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте.

Из (1.3.6), (1.3.46), (1.3.56) получаем, что при $t\to+\infty$ для решения задачи (1.3.1)-(1.3.3) имеем

$$u(t,x,y)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}}\lambda_{\ell_0}^{-\frac{1}{4}}\exp(i\lambda^{1/2}_{\ell_0}t)f_{\ell_0}\varphi_{\ell_0}(y)t^{\frac{1}{2}}+O(1), \quad (1.3.57)$$

где

$$f_{\ell_0}=\int\limits_{R_2}f_{\ell_0}(\xi)d\xi,$$

равномерно по x,y в каждом компакте.

Пусть теперь $n = 2$. Тогда при $\omega = \lambda_{\ell_0}^{1/2}$

$$G_\ell(t, x-\xi) = \int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} H_0^{(1)}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_\ell}) \frac{\exp(kt)}{k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2}} dk.$$

Функция $H_0^{(1)}(z)$ является аналитической функцией от z в комплексной плоскости с логарифмической особенностью в точке $z = 0$.

Как и в доказательстве теоремы 1.3.1 для четных n, при $\ell \neq \ell_0$ и $t \to +\infty$

$$G_\ell(t, x-\xi) = 2\pi i H_0^{(1)}(i|x-\xi|\sqrt{\lambda_\ell - \lambda_{\ell_0}}) \times$$
$$\times \exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2} t) + 2i^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left[\psi(\ell, t, \omega) + O(t^{-1})\right], \qquad (1.3.58)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте.

Пусть $\ell = \ell_0$,

$$G_{\ell_0}(t, x-\xi) = \int\limits_{\Gamma_{\ell_0}} H_0^{(1)}(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}) \frac{\exp(kt)}{k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2}} dk.$$

Используя разложение $H_0^{(1)}(z)$, получим

$$G_{\ell_0}(t, x-\xi) = \frac{2i}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|x-\xi|^{2\nu}}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \times$$
$$\times \int\limits_{\Gamma_{\ell_0}} (k + i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^\nu (k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\nu-1} \ln(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}) \exp(kt) dk. \quad (1.3.59)$$

Обозначим

$$J_\nu(t, |x-\xi|) = \int\limits_{\Gamma_{\ell_0}} (k + i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^\nu (k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\nu-1} \times$$

$$\times \ln(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})\exp(kt)dk, \quad \nu = 0,1,2,...$$

Рассмотрим

$$J_0(t,|x-\xi|) = \int_{\Gamma_{\ell_0}} (k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{-1} \ln(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}})\exp(kt)dk,$$

Можно показать, что

$$J_0(t,|x-\xi|) = \left[\int_{\Gamma_{\ell_0}^{(1)}} + \int_{\Gamma_{\ell_0}^{(2)}}\right](k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{-1} \ln(i|x-\xi|\sqrt{k^2+\lambda_{\ell_0}}) \times$$

$$\times \exp(kt)dk \equiv J_0^{(1)}(t,|x-\xi|) + J_0^{(2)}(t,|x-\xi|), \qquad (1.3.60)$$

где

$$\Gamma_{\ell_0}^{(1)} = (-\infty, -\varepsilon + i\lambda_{\ell_0}^{1/2}) \cup C_\varepsilon^{(1)} \cup (-\varepsilon + i\lambda_{\ell_0}^{1/2}, -\infty),$$

$$\Gamma_{\ell_0}^{(2)} = (-\infty, -\varepsilon - i\lambda_{\ell_0}^{1/2}) \cup C_\varepsilon^{(2)} \cup (-\varepsilon - i\lambda_{\ell_0}^{1/2}, -\infty).$$

Применяя к $J_0^{(1)}(t,|x-\xi|)$ лемму 1.3.2, получим

$$J_0^{(1)}(t,|x-\xi|) = 2\pi i \exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2} t)\ln t + \psi(t,|x-\xi|), \qquad (1.3.61)$$

где $\psi(t,|x-\xi|)$ ограничено при всех $t > 0$, $|x-\xi| \le A$. Так как интеграл по $C_\varepsilon^{(1)}$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то, учитывая обход в окрестности точки $k = -i\lambda_{\ell_0}^{1/2}$, получим

$$J_0^{(2)}(t,|x-\xi|) = \pi i \int_{-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}}^{-\infty - i\lambda_{\ell_0}^{1/2}} (k - i\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{-1} \exp(kt)dk \quad (1.3.62)$$

Применяя теорему 1.1.1 к интегралу (1.3.62), получим

$$J_{0}^{(2)}(t,|x-\xi|)=\frac{\pi}{2}\lambda_{\ell_0}^{-1/2}\exp(-i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)t^{-1}+O(t^{-2}).\quad(1.3.63)$$

Из (1.3.60)-(1.3.63) следует, что

$$J_0(t,|x-\xi|)=2\pi i\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)\ln t+\psi(t,|x-\xi|).\quad(1.3.64)$$

Далее, поступая так же, как и в доказательстве теоремы 1.3.2 для четных n при $t\to+\infty$, получим

$$J_{\nu}(t,|x-\xi|)=(-1)^{\nu}i^{\nu-1}\pi(2\lambda_{\ell_0}^{1/2})^{\nu}\Gamma(\nu)\times$$
$$\times\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)t^{-\nu}+O(t^{-\nu-1}),\quad \nu=1,2,3,...,\qquad(1.3.65)$$

равномерно по $|x-\xi|\le A$.

Из (1.3.59), (1.3.64) и (1.3.65) следует, что при $t\to+\infty$

$$G_{\ell_0}(t,|x-\xi|)=-4\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)\ln t+O(1),\qquad(1.3.66)$$

равномерно по $|x-\xi|$ в каждом компакте.

Из (1.3.6), (1.3.58), (1.3.66) и леммы 1.3.1 следует, что при $t\to+\infty$

$$u(t,x,y)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\exp(i\lambda_{\ell_0}^{1/2}t)\ln t\, f_{\ell_0}\varphi_{\ell_0}(y)+O(1),$$

равномерно по x,y в каждом компакте из $Ц$.

Таким образом, теорема доказана.

§1.4. Парциальные условия излучения А.Г.Свешникова

В этом параграфе мы дадим аналог известных парциальных условий А.Г.Свешникова для уравнения Гельмгольца в многомерной цилиндрической области.

Рассмотрим однородную краевую задачу в *Ц* с действительным параметром k^2.

$$(\Delta + k^2)u(k,x,y) = 0, \tag{1.4.1}$$

$$u(k,x,y)\big|_{\partial Ц} = 0. \tag{1.4.2}$$

Обозначим

$$u_\ell(k,x) = \int_\Omega u(k,x,y)\varphi_\ell(y)dy,$$

где $\varphi_\ell(y)$ - собственные функции оператора L, определенного в §1.2.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.4.1. *Решение $u(k,x,y)$ однородной краевой задачи (1.4.1)-(1.4.2), удовлетворяющее на бесконечности парциальным условиям излучения*

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|} - i\gamma_\ell\right)u_\ell(k,x) = O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}}\right), \quad \ell = 1,2,\ldots,\nu \tag{1.4.3}$$

есть только тривиальное решение, где $\gamma_\ell = \sqrt{k^2 - \lambda_\ell}$. Число ν определяется из соотношения $\lambda_\ell \le k^2$, а при $n = 1,2,\ k^2 \ne \lambda_\ell$.

Доказательство. Получим разложение $u(k,x,y)$ по собственным функциям $\varphi_\ell(y)$. Рассмотрим область

$$Ц_\rho = S_\rho(x) \times \Omega(y),$$

где $S_\rho(x)$ – шар в $R_n(x)$ радиуса ρ с центром в нуле. Граница Γ_ρ цилиндра $Ц_\rho$ определяется следующим образом

$$\Gamma_\rho = C_\rho(x)\times\Omega(y)\bigcup S_\rho(x)\times\partial\Omega,$$

где $C_\rho(x)$ – сфера в R_n радиуса ρ с центром в нуле. Фиксируем точку (x,y) и применим формулу Грина к функциям $u(k,x,y)$ и $G_1(k,x-\xi,y,z)$, где

$$G_1(k,x-\xi,y,z)=G(k,x-\xi,y,z)+H(k,x-\xi,y,z),$$

$$H(k,x-\xi,y,z)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}\sum_{\ell=1}^{\mu}\beta_\ell\varphi_\ell(y)\varphi_\ell(z)\gamma_\ell^{\frac{n}{2}-1}J_{\frac{n}{2}-1}(|x-\xi|\gamma_\ell),$$

а $\beta_\ell = const$, μ - любое целое число. Учитывая граничное условие (1.4.2) и равномерную сходимость рядов в выражениях и $\frac{\partial G_1}{\partial n}$ при $x\neq\xi$, получим

$$u(k,x,y)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\varphi_\ell(y)\times$$

$$\times\int\limits_{C_\rho(x)}\left[u_\ell(k,\xi)\frac{\partial J_\ell(k,x-\xi)}{\partial n}-J_\ell(k,x-\xi)\frac{\partial u_\ell(k,\xi)}{\partial n}\right]d\xi. \quad (1.4.4)$$

Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial|x-\xi|}.$$

Отсюда, учитывая ортонормированность $\varphi_\ell(y)$, получаем

$$u_\ell(k,x)=\int\limits_{C_\rho(x)}\left[u_\ell(k,\xi)\frac{\partial J_\ell(k,x-\xi)}{\partial n}-J_\ell(k,x-\xi)\frac{\partial u_\ell(k,\xi)}{\partial n}\right]d\xi,$$

где

$$J_\ell(k, x-\xi) = \frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4} |x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} \gamma_\ell^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times \left[(\beta_\ell + 1) H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(\gamma_\ell |x-\xi|) + \beta_\ell H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(\gamma_\ell |x-\xi|) \right]. \qquad (1.4.5)$$

Отметим, что в силу свойства дифференцирования свертки $u_\ell(k,x)$ для всех ℓ в $R_n(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta_x + k^2 - \lambda_\ell) u_\ell(k,x) = 0. \qquad (1.4.6)$$

В силу условия (1.4.3) из результатов работы [26] (с.116) следует, что $u_\ell(k,x)$ являются функциями первой категории, поэтому $\beta_\ell = 0,\ \ell = 1,2,...,\nu$ и для них при $|x| \to \infty$ имеет место асимптотика

$$u_\ell(k,x) = \exp(i\gamma_\ell |x|) O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}}\right), \quad \ell = 1,2,...,\nu \qquad (1.4.7)$$

Рассмотрим теперь $u_\ell(k,x)$ при $\ell = \nu+1, \nu+2, \ldots$. Для этих ℓ $\lambda_\ell > k^2$. Применяя преобразование Фурье к уравнению (1.4.6), считая при этом $u_\ell(k,x)$ обобщенной функцией над $C_0^\infty(R_n)$, получим

$$(k^2 - |s|^2 - \lambda_\ell)\hat{u}_\ell(k,s) = 0.$$

Отсюда, так как $k^2 - |s|^2 - \lambda_\ell < 0$, получаем, что $\hat{u}_\ell(k,s) = 0$. Следовательно,

$$u_\ell(k,x) = 0, \qquad \ell = \nu+1, \nu+2, \ldots \qquad (1.4.8)$$

Из асимптотики функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ при $z \to \infty$ следует, что

$$\frac{\partial J_\ell(k,x-\xi)}{\partial n} - i\gamma_\ell J_\ell(k,x-\xi) = \exp(i\gamma_\ell|\xi|)O\left(|\xi|^{-\frac{n+1}{2}}\right). \quad (1.4.9)$$

При больших $|\xi|$

$$\frac{\partial|\xi|}{\partial n} = 1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right).$$

Поэтому, учитывая (1.4.3)-(1.4.9),

$$u(k,x,y) = \sum_{\ell=1}^{\nu} \varphi_\ell(y) \int_{C_\rho(x)} \Big\{ u_\ell(k,\xi)\Big[i\gamma_\ell J_\ell(k,x-\xi) +$$

$$+\exp(i\gamma_\ell|\xi|)o\left(|\xi|^{-\frac{n+1}{2}}\right)\Big] - J_\ell(k,x-\xi)\left[i\gamma_\ell u_\ell(k,\xi) + o\left(|\xi|^{\frac{1-n}{2}}\right)\right]\Big\} d\xi =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\nu} \varphi_\ell(y) \int_{C_\rho(x)} \left[\exp(2i\gamma_\ell|\xi|)o\left(|\xi|^{-n}\right) + \gamma_\ell^{\frac{n-3}{2}} \exp(i\gamma_\ell|\xi|)o\left(|\xi|^{-n+1}\right)\right] d\xi.$$

Устремляя $\rho \to \infty$, получим, что $u(k,x,y) = 0$. В силу произвольности точки $(x,y) \in Ц$, получим доказательство теоремы.

Замечание. Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2), выделенное принципом предельного поглощения, удовлетворяет парциальным условиям (1.4.3). Доказательство этого факта следует из асимптотики

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\gamma_\ell\right)|x|^{1-\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(\gamma_\ell|x|) = \exp(i\gamma_\ell|x|)O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}}\right), \quad (1.4.10)$$

и из леммы 1.2.1.

ГЛАВА II

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ФИНИТНЫМ ВОЗМУШЕНИЕМ И ПРИНЦИПЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ С ИМПЕДАНСНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе изучено поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи для волнового уравнения с финитным возмущением, из чего, в частности, следует принцип предельной амплитуды. В этой главе также изучены принципы излучения для уравнения Гельмгольца в многомерном слое с импедансным краевым условием.

§2.1. Постановка задачи и некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $\widetilde{M} = (0,+\infty) \times Ц$, где $Ц$ есть цилиндр, определенный в §1.1. Рассмотрим в $\widetilde{M}$ следующую задачу

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta + q(x,y) \right] u(t,x,y) = f(x,y)\exp(i\omega t) \qquad (2.1.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x,y) = 0, \quad \frac{\partial u(0,x,y)}{\partial t} = 0 \qquad (2.1.2)$$

и с граничными условиями

$$u(t,x,y)\big|_{\partial Ц\times[0,+\infty)}=0, \qquad (2.1.3)$$

где ω – вещественное число, $f(x,y), q(x,y)$ – бесконечно дифференцируемые, финитные в $Ц$ функции. Введем пространство $H_0^s(Ц)$.

Определение 2.1.1. *Пусть* $H_0^s(Ц)$ *обозначает пополнение* $C_0^s(Ц)$ *в норме, соответствующей скалярному произведению*

$$\langle f,g\rangle_{H_0^s(Ц)}=\int_Ц\cdots\int f(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}\overline{g}\,dЦ=\sum_{|\alpha|\le s}\binom{s}{\alpha}\int_Ц\cdots\int D^\alpha f\,D^\alpha\overline{g}\,dЦ=$$

$$=\int_{R_{n+m}}\cdots\int(1+|\xi|^2)^{s/2}(Ff)(\xi)(\overline{Fg})(\xi)d\xi,$$

где F *– преобразование Фурье.*

Определение 2.1.2. *Под решением задачи (2.1.1)-(2.1.3) в* $\widetilde{M}$ *будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую по* t *функцию* $u(t,x,y)$, *при каждом* t *принадлежащую* $H_0^2(Ц)$ *и удовлетворяющую уравнению (2.1.1) и условиям (2.1.2) по* t *в обычном смысле, а по* x, y *в смысле* L_2.

Приведем две леммы, которые необходимы для дальнейшего.

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\tau\ge 0$ *и* $\ell\ge 0$. *Тогда*

$$\tau^2+\ell^2\ge C(\alpha)\tau^\alpha\ell^{2-\alpha}, \qquad (2.1.4)$$

где $C(\alpha)$ *определена ниже, а* $0\le\alpha\le 2$.

Доказательство. Пусть сначала $\tau>0$ и $\ell>0$. Разделим левую часть (2.1.4) на правую.

Тогда

$$\left(\frac{\tau}{\ell}\right)^{2-\alpha}+\left(\frac{\ell}{\tau}\right)^{\alpha}\geq C. \qquad (2.1.5)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\theta)=\theta^{2-\alpha}+\frac{1}{\theta^{\alpha}}$$

при $0<\theta\in R_1$. Найдем наименьшее значение этой функции. Пусть $0<\alpha<2$. Стационарными точками этой функции являются точки $\theta=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}$. Так как точка $\theta=-\sqrt{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}$ не входит в область определения неравенства (2.1.5), $g''\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}\right)=\dfrac{2(2-\alpha)^{1+\alpha/2}}{\alpha^{\alpha/2}}>0$, и $g(\theta)\to+\infty$ при $\theta\to+0$ и $\theta\to+\infty$, то $g\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}\right)$ является наименьшим значением этой функции. Таким образом,

$$C(\alpha)=g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)=\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{1-\alpha/2}+\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha/2}. \qquad (2.1.6)$$

Подставляя (2.1.6) в (2.1.5), получим (2.1.4) при $0<\alpha<2$. Случаи $\alpha=0, \alpha=2$ получаются из (2.1.4) и (2.1.6) предельным переходом. Отметим, что

$$\lim_{\alpha\to+0} g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)=1, \quad \lim_{\alpha\to2-0} g\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)=1.$$

При $\tau=0, \ell>0; \tau>0, \ell=0$ и $\tau=0, \ell=0$ неравенство (2.1.4) очевидно. Лемма доказана.

Считая $u(t,x,y)$ обобщенной функцией над D'_+ (см.[40], с.113), сделаем в (2.1.1)-(2.1.3) преобразование Лапласа по t. Тогда получим следующую задачу

$$\left(\Delta + q(x,y) - k^2\right)\vartheta(k,x,y) = \frac{f(x,y)}{k - i\omega} \qquad (2.1.7)$$

$$\vartheta(k,x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2.1.8)$$

где $\vartheta(k,x,y) = u(t,x,y)$, - преобразование Лапласа. Пусть далее $G(k,x,y)$ есть функция Грина задачи (2.1.7)-(2.1.8) при $q(x,y)=0$, удовлетворяющая на бесконечности парциальным условиям излучения (1.4.3). Для нее имеет место следующее разложение

$$G(k,x-\xi,y,z) = \frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4}\left|x-\xi\right|^{-(\frac{n}{2}-1)} \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(i\gamma_\ell\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i\left|x-\xi\right|\gamma_\ell)\varphi_\ell(y)\varphi_\ell(z), \qquad (2.1.9)$$

где $\gamma_\ell = \sqrt{k^2+\lambda_\ell}$, λ_ℓ и $\varphi_\ell(y)$ собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора $L=-\Delta_y$ с областью определения

$$D(L) = \{\vartheta : \vartheta \in H_0^2(\Omega)\} \qquad (2.1.10)$$

Имеет место следующая

Лемма 2.1.2. *Имеет место*

1. $\sqrt{(\lambda_\ell + k_1^2 - k_2^2)^2 + 4k_1^2k_2^2} =$
$$= \left[k_1^2 + (k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2\right]^{1/2}\left[k_1^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2\right]^{1/2},$$
2. $\mathrm{Re}\sqrt{k^2+\lambda_\ell} \ge |k_1|,$ *где* $k = k_1 + ik_2$.

Доказательство. Преобразуем первое подкоренное выражение

$$J^2 \equiv k_1^4 + 2(\lambda_\ell - k_2^2)k_1^2 + (\lambda_\ell - k_2^2)^2 + 4k_1^2k_2^2 =$$

$$= k_1^4 + (\lambda_\ell - k_2^2)^2 + 2\lambda_\ell k_1^2 + 2k_1^2k_2^2 + 2k_1^2k_2\sqrt{\lambda_\ell} - 2k_1^2k_2\sqrt{\lambda_\ell} =$$

$$= k_1^4 + (\lambda_\ell - k_2^2)^2 + k_1^2(k_2^2 + 2k_2\sqrt{\lambda_\ell} + \lambda_\ell) +$$

$$+ k_1^2(k_2^2 - 2k_2\sqrt{\lambda_\ell} + \lambda_\ell) = k_1^4 + (\lambda_\ell - k_2^2)^2 + k_1^2(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2 +$$

$$+ k_1^2(k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2 = k_1^2[k_1^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2] +$$

$$+ (k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2[k_1^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2] =$$

$$= [k_1^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2][k_1^2 + (k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2].$$

Отсюда следует утверждение 1.

Докажем теперь утверждение 2. Так как

$$(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2 \geq 2(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})(k_2 - \sqrt{\lambda_\ell}),$$

то получим

$$J^2 \equiv k_1^4 + k_1^2[(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2] + (k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2(k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2 \geq$$

$$\geq k_1^4 + 2k_1^2(k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell}) + (k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})^2(k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})^2 =$$

$$= [k_1^2 + (k_2 - \sqrt{\lambda_\ell})(k_2 + \sqrt{\lambda_\ell})]^2. \qquad (2.1.11)$$

Для $\operatorname{Re}\sqrt{k^2 + \lambda_\ell}$ имеет место представление

$$\operatorname{Re}\sqrt{k^2 + \lambda_\ell} = \sqrt{\frac{\sqrt{(k_1^2 - k_2^2 + \lambda_\ell)^2 + 4k_1^2k_2^2} + k_1^2 - k_2^2 + \lambda_\ell}{2}}. \qquad (2.1.12)$$

Из неравенства (2.1.11)

$$J \geq k_1^2 + k_2^2 - \lambda_\ell. \qquad (2.1.13)$$

Учитывая (2.1.13) в (2.1.12), получим

$$\mathrm{Re}\sqrt{k^2+\lambda_l} \geq |k_1|.$$

Лемма доказана.

§2.2. Приведение задачи (2.1.7)-(2.1.8) к эквивалентному операторному уравнению

Можно показать (см.[42]), что задача (2.1.7)-(2.1.8) в $L_2(Ц)$ эквивалентна операторному уравнению

$$W(k,x,y)+P(k)W(k,x,y)=\frac{f(x,y)}{k-i\omega}, \qquad (2.2.1)$$

с вполне непрерывным оператором $P(k)$, аналитически зависящим от комплексного параметра k $(\mathrm{Re}\,k>0)$ и действующим в пространстве $L_2(Ц)$. Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Формула*

$$\vartheta(k,x,y)=T(k)W(k,x,y) \qquad (2.2.2)$$

при каждом k $(\mathrm{Re}\,k>0)$ *устанавливает взаимно однозначное соответствие между принадлежащими* $H_0^2(Ц)$ *решениями задачи (2.1.7)-(2.1.8) и принадлежащими* $L_2(Ц)$ *решениями уравнения (2.2.1), где*

$$T(k)W(k,x,y)=\int\limits_{Ц}\!\cdots\!\int G(k,x-\xi,y,z)W(k,\xi,z)\,dЦ. \quad (2.2.3)$$

Доказательство. Пусть $W(k,x,y)$ есть решение уравнения (2.2.1), принадлежащее $L_2(Ц)$. Покажем, что формула (2.2.3) имеет смысл. Так как ряд в (2.2.3) при $|x-\xi|\geq\varepsilon>0$ сходится равномерно по всем переменным, то

$$\vartheta(k,x,y)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(i\gamma_\ell\right)^{\frac{n}{2}-1}\varphi_\ell(y)\times$$

$$\times\int_{R_n}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell)|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}W_\ell(k,\xi)d\xi,$$

где

$$W_\ell(k,\xi)=\int_\Omega W(k,\xi,z)\varphi_\ell(z)dz.$$

Далее, по равенству Персеваля

$$\int_\Omega|\vartheta(k,x,y)|^2dy=\frac{(2\pi)^{-n}}{16}\sum_{\ell=1}^{\infty}|\gamma_\ell|^{n-2}\times$$

$$\times\left|\int_{R_n}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell)|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}W_\ell(k,\xi)d\xi\right|^2.$$

Интегрируя последнее равенство по x в R_n, получим

$$\int_{Ц}\cdots\int|\vartheta(k,x,y)|^2dЦ=\frac{(2\pi)^{-n}}{16}\sum_{\ell=1}^{\infty}|\gamma_\ell|^{n-2}\times$$

$$\times\int_{R_n}\left|\int_{R_n}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell)|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}W_\ell(k,\xi)d\xi\right|^2dx. \qquad (2.2.4)$$

Рассмотрим интегралы вида

$$J_\ell(k)=\left[\int_{R_n}\left|\int_{R_n}|x-\xi|^{-\frac{n}{2}+1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x-\xi|\gamma_\ell)W_\ell(k,\xi)d\xi\right|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.2.5)$$

Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга (см.[43], с.57), из (2.2.5) получим

$$J_\ell(k) \le J_\ell^*(k)\|W_\ell(k,\xi)\|_{L_2(R_n)},$$

где

$$J_\ell^*(k) = \int_{R_n} |x|^{-\frac{n}{2}+1} \left| H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x|\gamma_\ell) \right| dx.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$J_\ell^*(k) = \omega_{n-1} \int_0^\infty |x|^{\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i|x|\gamma_\ell) d|x|, \qquad (2.2.6)$$

где

$$\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Из утверждения 2 леммы 2.1.2 следует, что при $\operatorname{Re} k = k_1 \ne 0$ интеграл в (2.2.6) сходится в виду асимптотики функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ при больших $|z|$. В интеграле (2.2.6) сделаем замену переменных $|x||\gamma_\ell| = \tau$. Тогда

$$J_\ell^*(k) = \omega_{n-1} |\gamma_\ell|^{-(\frac{n}{2}+1)} \int_0^\infty \tau^{\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\tau \frac{\gamma_\ell}{|\gamma_\ell|} \right) d\tau.$$

Таким образом,

$$J_\ell^2(k) \le C|\gamma_\ell|^{-2(\frac{n}{2}+1)} \int_{R_n} |W_\ell(k,\xi)|^2 d\xi. \qquad (2.2.7)$$

Из (2.2.4) и (2.2.7) следует

$$\int_{Ц}\cdots\int|\vartheta(k,x,y)|^2\,dЦ \le C\sum_{\ell=1}^{\infty}|\gamma_\ell|^{-4}\int_{R_n}|W_\ell(k,\xi)|^2\,d\xi. \qquad (2.2.8)$$

Оценим теперь $|\gamma_\ell|^{-4}$ при $\operatorname{Re}k>0$. Пусть $k=k_1+ik_2$.

В силу леммы 2.1.2

$$|\gamma_\ell|^2=\left[k_1^2+(k_2+\sqrt{\lambda_\ell})^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[k_1^2+(k_2-\sqrt{\lambda_\ell})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$|\gamma_\ell|^2\ge\left[k_1^2+(k_2+\sqrt{\lambda_\ell})^2\right]^{\frac{1}{2}}|k_1|\ge 2^{\frac{1}{2}}|k_1|^{\frac{2}{3}}(|k_2|+\sqrt{\lambda_\ell})^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя лемму 2.1.1 при $\alpha=\dfrac{1}{2}$ к последнему неравенству, получаем, что при $\operatorname{Re}k>0$

$$|\gamma_\ell|^2\ge\sqrt{2C}\,2^{-1}|k_1|^{\frac{3}{2}}(\varepsilon+|k_2|)^{\frac{3}{4}}(\sqrt{\lambda_\ell}-\varepsilon)^{\frac{1}{4}}.$$

Отсюда

$$|\gamma_\ell|^4\ge 2^{-1}C|k_1|^3(\varepsilon+|k_2|)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{\lambda_\ell}-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\ge 2^{-1}C|k_1|^3(\varepsilon+|k_2|)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.2.9)$$

так как $\lambda_\ell\to+\infty$ при $\ell\to+\infty$ (см.[41], с.190), где $0<\varepsilon<\sqrt{\lambda_1}$.

В силу

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{R_n}|W_\ell(k,\xi)|^2\,d\xi=\int_{Ц}\cdots\int|W(k,\xi,z)|^2\,dЦ$$

из (2.2.8) и (2.2.9) следует

$$\int_{Ц}\cdots\int|\vartheta(k,x,y)|^2 dЦ \le \frac{C}{|k_1|^3(|k_2|+\varepsilon)^{3/2}}\int_{Ц}\cdots\int|W(k,x,y)|^2 dЦ. \quad (2.2.10)$$

Пусть $\vartheta(k,x,y)$ определена формулой (2.2.2), где $W(k,x,y)$ есть решение уравнения (2.2.1), принадлежащее $L_2(Ц)$. Подставляя это выражение $\vartheta(k,x,y)$ в уравнение (2.1.7), получаем, что уравнение удовлетворяется. Удовлетворение граничным условиям (2.1.8) следует из того, что этим условиям удовлетворяет функция Грина $G(k,x-\xi,y,z)$ стационарной задачи (2.1.7)-(2.1.8) с $q(x,y)=0$. Оценим теперь норму $\|\vartheta(k,x,y)\|_{H_0^2(Ц)}$. По определению нормы в $H_0^2(Ц)$ и в силу формулы (2.2.3) получаем

$$\|\vartheta(k,x,y)\|^2_{H_0^2(Ц)} = \int_{Ц}\cdots\int|(\Delta-1)\vartheta(k,x,y)|^2 dЦ =$$

$$= \int_{Ц}\cdots\int\left|\left[(\Delta-k^2)+(k^2-1)\right]\vartheta(k,x,y)\right|^2 dЦ \le$$

$$\le 2\left\{\int_{Ц}\cdots\int|(\Delta-k^2)\vartheta|^2 dЦ + |1-k^2|^2\int_{Ц}\cdots\int|\vartheta(k,x,y)|^2 dЦ\right\} \le$$

$$\le 2\left\{\int_{Ц}\cdots\int|W(k,x,y)|^2 dЦ + |1-k^2|^2\int_{Ц}\cdots\int|\vartheta(k,x,y)|^2 dЦ\right\}. \quad (2.2.11)$$

Учитывая (2.2.10) при $\operatorname{Re}k>0$, из (2.2.11) получаем

$$\|\vartheta(k,x,y)\|^2_{H_0^2(Ц)} \le 2\left\{1+C|1-k^2|^2|k_1|^{-3}(\varepsilon+|k_2|)^{-\frac{2}{3}}\right\}\|W(k,x,y)\|_{L_2(Ц)}$$

Пусть теперь $u(k,x,y)$ является решением задачи (2.1.7)-(2.1.8), принадлежащее $H_0^2(Ц)$ (с правой частью $f(x,y)$). Рассмотрим функцию

$$W(k,x,y)=f(x,y)+q(x,y)u(k,x,y). \quad (2.2.12)$$

Положим

$$\vartheta(k,x,y) = T(k)W(k,x,y).$$

Подставим эту функцию в (2.1.7). Тогда получим, что уравнение (2.2.1) удовлетворяется, где

$$P(k)W(k,x,y) = q(x,y)T(k)W(k,x,y). \qquad (2.2.13)$$

Однозначность очевидна. Теорема доказана.

Отметим следующую лемму.

Лемма 2.2.3. *При* $\operatorname{Re} k > 0$ *и малых* $q(x,y)$ *решение операторного уравнения (2.2.1) существует и единственно, где операторзначная функция* $P(k)$ *определяется формулой (2.2.13), а* $T(k)$ *– формулой (2.2.3).*

Доказательство. Оценивая по норме $L_2(Ц)$, получим

$$\|P(k)W(k,x,y)\|^2_{L_2(Ц)} \le \max_{(x,y)\in Ц} |q(x,y)|^2 \int_Ц \cdots \int |T(k)W(k,x,y)|^2 dЦ.$$

Учитывая оценку (2.2.10), получим

$$\|P(k)W(k,x,y)\|_{L_2(Ц)} \le C(k) \max_{(x,y)\in Ц} |q(x,y)| \|W\|_{L_2(Ц)}.$$

Отсюда следует, что если

$$\max_{(x,y)\in Ц} |q(x,y)| << 1,$$

то оператор $I + P(k)$ имеет ограниченный обратный в пространстве $L_2(Ц)$.

Лемма 2.2.4. *Оператор* $P(k)$ *при* $\operatorname{Re} k > 0$ *аналитически зависит от параметра* k. *При каждом таком* k *он вполне непрерывен и при больших положительных* k $\|P(k)\| < 1$.

Доказательство. Так как $q(x,y)$ гладкая и финитная функция, то из (2.2.10)-(2.2.11) следует, что оператор $P(k)$ при $\operatorname{Re} k > 0$ ограниченно действует из пространства $L_2(Ц)$ в $H_0^2(Ц)$. Поэтому он как оператор из пространства $L_2(Ц)$ в $L_2(Ц)$ вполне непрерывен. Так как каждый член ряда (2.1.9) есть аналитическая функция от k в правой полуплоскости и ряд (2.1.9) сходится равномерно по всем аргументам при $|x-\xi| \ge \varepsilon$, то $G(k, x-\xi, y, z)$ является аналитической функцией от k в правой полуплоскости. Из (2.2.13) следует

$$\|P(k)W(k,x,y)\|_{L_2(Ц)} \le C\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(Ц)}.$$

При $\operatorname{Im} k = 0$ в силу леммы 2.1.1 имеем

$$\gamma_\ell^2 = k^2 + \lambda_\ell \ge C(\alpha) k^{2-\alpha} \lambda_\ell^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad (2.2.14)$$

где $0 \le \alpha \le 2$. Если в оценке (2.2.8) использовать (2.2.14), то получим, что

$$\|P(k)W(k,x,y)\|_{L_2(Ц)}^2 \le Ck^{-2(2-\alpha)}\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(Ц)}^2.$$

Отсюда имеем

$$\|P(k)\|^2 \le Ck^{-2(2-\alpha)}, \quad \text{т.е.} \quad \|P(k)\| \le \frac{C}{1+|k|^{2-\alpha}}.$$

Таким образом, при достаточно больших положительных k имеем $\|P(k)\| < 1$.

Лемма 2.2.4 доказана.

Приведем теорему, которая необходима для дальнейшего.

Теорема 2.2.2. (Аналитическая теорема Фредгольма. см.[44], с.224, [45]).

Если $A(\lambda)$ есть вполне непрерывный оператор, аналитически зависящий от λ в области D, *действующий в банаховом пространстве* X, *и существует резольвента $R(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, то она существует во всей области* D, *за исключением дискретного множества точек, и является конечно мероморфной оператор-функцией от λ.*

§2.3. Исследование при $t \to +\infty$ поведения решения нестационарной задачи (2.1.1)-(2.1.3)

Функция Грина задачи (2.1.7)-(2.1.8) при $q(x, y) = 0$ является аналитической функцией от k в правой полуплоскости, за исключением счетного числа особых точек $k_\ell = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$ на мнимой оси. Устроим на плоскости k разрезы $(-\infty + i\lambda_\ell^{1/2}, i\lambda_\ell^{1/2})$ и для $\sqrt{k^2 + \lambda_\ell}$ выбираем ветвь, которая положительна при вещественных k. Отметим, что если n – четное число, то

$$\left(\sqrt{k^2 + \lambda_\ell}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i\sqrt{k^2 + \lambda_\ell})$$

является аналитической функцией от k с логарифмическими особенностями в точках $k = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$. Если же n – нечетное число, тогда функция $\left(\sqrt{k^2 + \lambda_\ell}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(i\sqrt{k^2 + \lambda_\ell})$ имеет в точках $k = \pm i\lambda_\ell^{1/2}$ алгебраические особенности. Рассмотрим контур, указанный на рис.3.

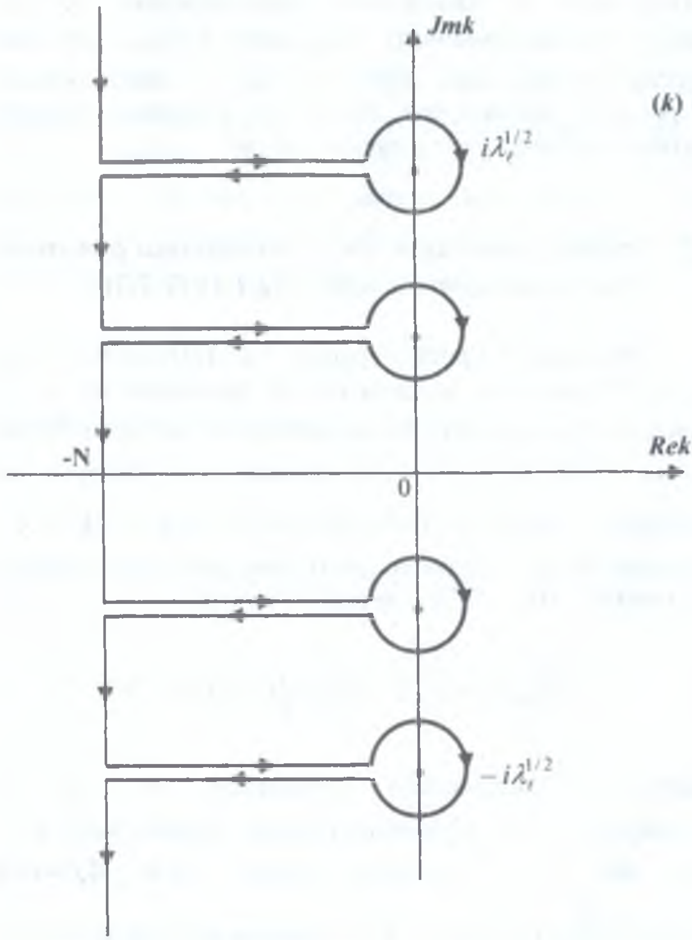


рис.3

Функция $G(k, x-\xi, y, z)$ допускает аналитическое продолжение в левую полуплоскость $\mathrm{Re}\,k < 0$. Точно также, как и в лемме 2.2.4, можно показать, что при достаточно больших $|k|$ ($\mathrm{Re}\,k > 0$) оператор $I + P(k)$ имеет ограниченный обратный. Поэтому в силу теоремы 2.2.2 резольвента $R(k) = (I + P(k))^{-1}$ в области $D_\delta = \{k : \mathrm{Re}\,k > -\delta\}$ является оператором, конечно-мераморфно зависящим от параметра k. Так как полюсов в этой области конечное число, то прямую $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ можно выбрать так, чтобы на ней резольвента $R(k)$ не имела полюсов.

Лемма 2.3.1. *Для решения краевой задачи (2.1.7)-(2.1.8) при* $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ *имеет место оценка*

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{C|\delta|^{-3}}{(1+|k_2|)^{5/2}} \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)}, \qquad (2.3.1)$$

где C *– постоянная,* $k_2 = \mathrm{Im}\,k$.

Доказательство. Так как на прямой $\mathrm{Re}\,k = -\delta$ резольвента $R(k)$ не имеет полюсов, то

$$\|W(k,x,y)\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{C}{|k - i\omega|} \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)}. \qquad (2.3.2)$$

Ввиду того, что

$$\overline{T(k)} = T(-\bar{k}),$$

используя (2.2.10) и (2.3.2) получим, что на прямой $\mathrm{Re}\,k = -\delta$

$$\|\vartheta(k,x,y)\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{C|\delta|^{-3}}{(1+|k_2|)^{\frac{3}{2}}} \|W(k,x,y)\|_{L_2(\Pi)} \le \frac{C|\delta|^{-3}}{(1+|k_2|)^{\frac{5}{2}}} \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)}.$$

Этим лемма 2.3.1 доказана.

Пусть теперь $s_\nu (\nu = 1,2,...,\mu)$ полюсы резольвенты $R(k)$ порядка q_ν, расположенные в области D_δ, и первые μ_0 из них расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$. Известно, что для $R(k)$ имеет место следующее разложение (см.[44], с.224, [45])

$$R(k) = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\nu=1}^{q_j} (k - s_j)^{-\nu} D_{j\nu} + D(k), \qquad (2.3.3)$$

где $D_{j\nu}$ - конечномерные операторы, а $D(k)$ – регулярная оператор-функция от k.

Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f(x,y)$ *и* $q(x,y)$ – *финитные бесконечно-дифференцируемые функции,* $\omega \neq s_\nu, \pm\lambda_\ell^{1/2}$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для решения смешанной задачи (2.1.1)-(2.1.3) имеет место асимптотическое разложение*

$$u(t,x,y) = \exp(i\omega t)\vartheta(i\omega, x, y) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\mu} \underset{k=s_j}{\text{Выч}} \exp(kt) \frac{\vartheta(k,x,y)}{k - i\omega} + Q(t,x,y), \qquad (2.3.4)$$

где $\vartheta(i\omega,x,y)$ *- решение задачи (2.1.7)-(2.1.8) при* $k = i\omega$ *с правой частью* $f(x,y)$ *и*

$$\left\| \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Q(t,x,y) \right\|_{L_2(\Pi)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right). \qquad (2.3.5)$$

Доказательство. Решение задачи (2.1.1.)-(2.1.3) определяется с помощью решения стационарной задачи по формуле

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\alpha}^{i\infty+\alpha}\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}\exp(kt)dk, \qquad (2.3.6)$$

где $\vartheta(k,x,y)$ - решение задачи (2.1.7)-(2.1.8) и

$$\vartheta(k,x,y)=TR(k)\frac{f(x,y)}{k-i\omega}=TW(k,x,y).$$

Используя лемму 2.3.1, по теореме Коши получим

$$u(t,x,y)=\exp(i\omega t)\vartheta(i\omega,x,y)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\mu}\underset{k=s_j}{Выч}\exp(kt)\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}+\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta}\exp(kt)\frac{T(k)D(k)f(x,y)}{k-i\omega}dk+$$

$$+\int_{-i\infty-N}^{i\infty-N}\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}\exp(kt)dk+\sum_{\ell=1}^{\infty}\int_{\Gamma_{\varepsilon\ell}}\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}\exp(kt)dk, \quad (2.3.7)$$

где $\Gamma_{\varepsilon\ell}$ состоит из берегов разреза $(-\delta+i\lambda_\ell^{1/2}, i\lambda_\ell^{1/2})$ и окружностей радиуса ε с центром в точке $k=i\lambda_\ell^{1/2}$. В силу разложения (2.3.3) имеем

$$\sum_{j=1}^{\mu}\underset{k=s_j}{Выч}\exp(kt)\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}=\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{(q_j-1)!}\frac{d^{q_j-1}}{dk^{q_j-1}}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{q_j}(k-s_j)^{q_j-\nu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}T(k)D_{j\nu}f(x,y)\Big|_{k=s_j}$$

В силу регулярности $D(k)$

$$\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta}\exp(kt)\frac{T(k)D(k)f(x,y)}{k-i\omega}dk=0. \qquad (2.3.8)$$

Ниже (см. лемму 2.3.2) мы покажем, что

$$\left\| \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\Gamma_{\ell\varepsilon}} \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega} \exp(kt)dk \right\|_{L_2(Ц)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right) \qquad (2.3.9)$$

при $\varepsilon \to 0$, $t \to +\infty$.

Оценим теперь интеграл

$$z(t,x,y) = \int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega} \exp(kt)dk.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\int_{Ц}\cdots\int |z(t,x,y)|^2 dЦ \le \exp(-2\delta t) \int_{Ц}\cdots\int \left| \int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega} dk \right|^2 dЦ \le$$

$$\le \exp(-2\delta t) \int_{Ц}\cdots\int dЦ \int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} \frac{|\vartheta(k,x,y)|^2}{|k-i\omega|^{2-\gamma}} dk,$$

где $1<\gamma<2$. Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{Ц}\cdots\int |z(t,x,y)|^2 dЦ \le C \exp(-2\delta t) \int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta} \frac{|dk|}{|k-i\omega|^{2-\gamma}} \int_{Ц}\cdots\int |\vartheta(k,x,y)|^2 dЦ.$$

Используя в последнем интеграле оценку (2.3.1), получим

$$\int_{Ц}\cdots\int |z(t,x,y)|^2 dЦ \le C(\delta) \exp(-2\delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{(1+|k_2|)^{7-\gamma}} \|f(x,y)\|^2_{L_2(Ц)} \le$$

$$\le C(\delta) \exp(-2\delta t) \|f(x,y)\|^2_{L_2(Ц)},$$

т.е.

$$\|z(t,x,y)\|_{L_2(Ц)} \le C(\delta) \exp(-\delta t) \|f(x,y)\|^2_{L_2(Ц)}. \qquad (2.3.10)$$

Из (2.3.6)-(2.3.10) следует доказательство теоремы.

Из этой теоремы следует следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1 и $f(x,y)$ удовлетворяет конечному числу условий ортогональности. Тогда для задачи (2.1.1)-(2.1.3) имеет место принцип предельной амплитуды, т.е. при $t \to +\infty$*

$$u(t,x,y) = \exp(i\omega t)\vartheta(i\omega,x,y) + Q(t,x,y)$$

где для $Q(t,x,y)$ имеет место оценка (2.3.5).

Перейдем к доказательству леммы, которой мы пользовались в доказательстве теорем 2.3.1 и 2.3.2.

Лемма 2.3.2. *Пусть*

$$\Phi_\varepsilon(t,x,y) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\Gamma_{\varepsilon\ell}} \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}\exp(kt)dk,$$

где $\Gamma_{\varepsilon\ell}$ определены выше. Тогда при $\varepsilon \to 0$ и $t \to +\infty$ для $\Phi_0(t,x,y)$ имеет место оценка (2.3.5).

Доказательство. Рассмотрим

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon\ell}} \frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}\exp(kt)dk.$$

Как сказано выше

$$\vartheta(k,x,y) = T(k)W(k,x,y) = T(k)R(k)f(x,y),$$

где $R(k) = (I + q(x,y)T(k))^{-1}$. В области $D = \{k \in C; \operatorname{Re} k \geq -\delta\}$, $0 < \delta$ - достаточно малое число, с указанными на рис.2 разрезами, в силу теоремы 2.2.2 $R(k)$ является конечно-мероморфной функцией. Выбираем ε и δ таким образом, чтобы на контурах $\Gamma_{\varepsilon\ell}$ резольвента $R(k)$ полюсов не имела.

Обозначим

Применяя теорему 1.1.1 к интегралу по $\Gamma_{0\ell}$ и учитывая, что на $\Gamma_{0\ell}$, $\operatorname{Re} k \le 0$, получим

$$\int_{\Omega} |\Phi_0(t,x,y)|^2 dy \le \frac{C(n)}{t^{n-2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\lambda_\ell|^{n-2} \left\| W_\ell(i\lambda_\ell^{1/2}, \xi) \right\|^2_{L_2(R_n)} \qquad (2.3.12)$$

Из вида оператора $T(k)$ следует, что $T(k)W(k,x,y) \in C^\infty(Ц)$, так как таким свойством обладает функция Грина $G(k,x,y)$. В силу того, что $f(x,y) \in C_0^\infty(Ц)$, из уравнения (2.2.1) получаем, что $W(k,x,y) \in C^\infty(Ц)$. При $k \ne s_j$ и больших $|\operatorname{Im} k|$, $W(k,x,y)$ ограничена, поэтому по лемме 1.3.1 ряд в (2.3.12) сходится. Умножая (2.3.12) на $\exp(-x^2)$ и интегрируя по R_n, получим, что при $t \to +\infty$

$$\left\| \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Phi_0(t,x,y) \right\|_{L_2(Ц)} = O\left(t^{-\frac{n}{2}+1}\right). \qquad (2.3.13)$$

Если $n = 1$, то

$$H_0^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp(iz),$$

и, повторяя вышеприведенную схему, получим

$$\left\| \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Phi_0(t,x,y) \right\|_{L_2(Ц)} = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad (2.3.14)$$

Пусть теперь $n = 2$. Используя разложение $H_0^{(1)}(z)$ для целых индексов в окрестности нуля (см.[29], с.177) и совершая обход точки $k = i\lambda_\ell^{1/2}$, учитывая при этом, что $H_0^{(1)}(z)$ имеет логарифмическую особенность и ограничиваясь только первым членом разложения, получим

$$\Phi_{0\ell}(t,x,y)=\varphi_\ell(y)\int_{\Gamma_{0\ell}}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\int_{R_n}\ln(i|x-\xi|\gamma_\ell)W_\ell(k,\xi)d\xi.$$

Далее, поступая как и выше, получим

$$\int_{\Omega}|\Phi_0(t,x,y)|^2\,dy=\frac{C}{t^2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\|W_\ell(i\lambda_\ell^{1/2},\xi)\right\|^2_{l_2(R_n)}.$$

Отсюда, умножив последнее неравенство на $\exp(-x^2)$ (следует отметить, что в следующих слагаемых в выражении $\Phi_{0\ell}(t,x,y)$, которые мы опускали, появятся множители $|x|^\ell\ln|x|$), получим

$$\left\|\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Phi_0(t,x,y)\right\|_{l_2(\Pi)}=O\left(t^{-1}\right). \qquad (2.3.15)$$

Если $2<n$ и n – четное число, то, поступая так же как в нечетномерном случае, получим оценку (2.3.13).

Из (2.3.13)-(2.3.15) следует доказательство леммы.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\omega=s_1$ и выполнены остальные условия теоремы 2.3.1. Тогда при $t\to+\infty$ для решения задачи (2.1.1)-(2.1.3) имеет место разложение*

$$u(t,x,y)=\frac{1}{q_1!}\frac{d^{q_1}}{dk^{q_1}}\sum_{\nu=1}^{q_1+1}(k-s_1)^{q_1+1-\nu}\exp(kt)T(k)D_{\nu_1}f(x,y)\Big|_{k=s_1}+$$

$$+\sum_{j=2}^{\mu}\underset{k=s_j}{\text{Выч}}\exp(kt)\frac{\vartheta(k,x,y)}{k-i\omega}+Q(t,x,y),$$

где для $Q(t,x,y)$ выполнена оценка (2.3.5).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.3.1.

§2.4. Принцип предельного поглощения для уравнения Гельмгольца с импедансным краевым условием в многомерном слое

В последующих двух параграфах будут обоснованы принципы излучения для уравнения Гельмгольца в многомерном слое с импедансным краевым условием. В отличие от предыдущих параграфов, комплексный спектральный параметр в этой задаче входит также и в краевое условие. Для решения поставленной задачи здесь применяется теория преобразования Фурье.

Пусть

$$\Pi = \{x : (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R_{n+1}, -\infty < x_j < +\infty, -h < x_{n+1} < h, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

есть слой в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R_{n+1}.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$(\Delta + k^2) u(k, x) = f(x), \tag{2.4.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \alpha k \right) u(k, x) \bigg|_{x_{n+1} = \pm h} = 0, \tag{2.4.2}$$

где Δ есть $(n+1)$-мерный оператор Лапласа, $f(x)$ - финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в П, k^2 – постоянная (не обязательно вещественная), α - комплексный параметр. Решение задачи (2.4.1)-(2.4.2) определяется как в §1.1.

В дальнейшем через $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ будем обозначать двойственное к x переменное относительно преобразования Фурье и $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $s' = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $\rho = |s'|$. Наряду с задачей (2.4.1)-(2.4.2) рассмотрим также задачу

$$(\Delta + k^2) G(k, x, y) = \delta(x' - y', x_{n+1}, y_{n+1}), \tag{2.4.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}+\alpha k\right)G\Big|_{x_{n+1}=\pm h}=0. \qquad (2.4.4)$$

Определение 2.4.1. *Пусть* $\operatorname{Im}k^2\neq 0$. *Убывающее при* $x\to\infty$ *решение задачи (2.4.3)-(2.4.4) будем называть функцией Грина задачи (2.4.1)-(2.4.2).*

Перейдем теперь к построению функции Грина. По принципу предельного поглощения для выделения единственного решения задачи (2.4.1)-(2.4.2) вещественный параметр k^2 в уравнении (2.4.1) заменим на $k^2+i\varepsilon$, затем, построив убывающее на бесконечности решение задачи, перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Совершив в (2.4.3)-(2.4.4) преобразование Фурье по x', получим

$$\left[\frac{d^2}{dx_{n+1}}+k_\varepsilon^2-\rho^2\right]\hat{G}(k_\varepsilon,s',x_{n+1},y_{n+1})=$$

$$=\delta(x_{n+1},y_{n+1})\exp[i(s',y')], \qquad (2.4.5)$$

$$\left(\frac{d}{dx_{n+1}}+\alpha k_\varepsilon\right)\hat{G}\Big|_{x_{n+1}=\pm h}=0. \qquad (2.4.6)$$

Можно показать, что убывающее на бесконечности решение задачи (2.4.5)-(2.4.6) имеет вид:

$$\hat{G}(k_\varepsilon,s',x_{n+1},y_{n+1})=\exp[i(s',y')]\left[-\frac{ch\left[i\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\left(2h-|x_{n+1}-y_{n+1}|\right)\right]}{2i\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\,sh\left(2ih\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\right)}+\right.$$

$$+\frac{\left[\alpha^2k_\varepsilon^2-\left(k_\varepsilon^2-\rho^2\right)\right]ch\left[i\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\left(x_{n+1}+y_{n+1}\right)\right]}{2i\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\left(\alpha^2k_\varepsilon^2+k_\varepsilon^2-\rho^2\right)sh\left(2ih\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\right)}-$$

$$-\frac{\alpha k_\varepsilon sh\left[i\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\left(x_{n+1}+y_{n+1}\right)\right]}{\left[\left(\alpha^2+1\right)k_\varepsilon^2-\rho^2\right]sh\left(2ih\sqrt{k_\varepsilon^2-\rho^2}\right)}\Bigg]. \qquad (2.4.7)$$

Из (2.4.7) видно, что функция $\hat{G}$ является аналитической функцией от ρ с простыми полюсами в точках

$$\rho_{1,2}=\pm\sqrt{(1+\alpha^2)k_\varepsilon^2}, \quad \rho_{3,\ell}^{\pm}=\pm\sqrt{k_\varepsilon^2-\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}}.$$

При $x_{n+1}\neq y_{n+1}$ функции $\hat{G}$ является абсолютно интегрируемой функцией по s′. Совершив обратное преобразование Фурье по s′ в выражении $\hat{G}$, получим

$$G(k,x,y)=-\frac{ir^{1-\frac{n}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}}\Bigg[\left(\sqrt{(1+\alpha^2)k^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}g_0(k,x_{n+1})\times$$

$$g_0(k,y_{n+1})H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left[\sqrt{(1+\alpha^2)k^2}\,r\right]+$$

$$+\sum_{\ell=1}^{\infty}k_\ell^{\frac{n}{2}-1}g_\ell(k,x_{n+1})g_\ell(k,y_{n+1})H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(k_\ell r)\Bigg], \qquad (2.4.8)$$

где

$$g_0(k,x_{n+1})=\left[\frac{\alpha k}{sh(2h\alpha k)}\right]^{1/2}\exp(-\alpha kx_{n+1}),$$

$$g_\ell(k,x_{n+1})=\frac{\frac{\pi\ell}{2h}\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}+\alpha k\sin(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}}{\left[h(\alpha^2k^2+\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2})\right]^{1/2}},$$

$$k_\ell = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2 \ell^2}{4h^2}}, \quad r = |x' - y'|.$$

Таким образом доказана следующая теорема

Теорема 2.4.1. *Функция Грина задачи (2.4.1)-(2.4.2) ($\alpha \neq i$ при $n = 1,2$) является аналитической функцией от k, за исключением счетного числа точек $k = \frac{\pi\ell}{2h}$, являющихся точками ветвления, а также точек вида $k = i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}$, $\ell = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, являющихся простыми полюсами, и для нее имеет место разложение (2.4.8).*

При $x' \neq y'$, $k \neq i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}$ и $k \neq \frac{\pi\ell}{2h}$ при $n = 1,2$, ряд в (2.4.8) сходится равномерно по ε.

Решение задачи (2.4.1)-(2.4.2) определяется формулой

$$u(k_\varepsilon, x) = G(k_\varepsilon, x, y) * f(y), \tag{2.4.9}$$

где свертка совершается по y по слою Π. Поэтому в силу непрерывности операции свертки, переходя к пределу в (2.4.9) при $\varepsilon \to 0$, получим следующую теорему.

Теорема 2.4.2. *При $k \neq i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}$ ($k \neq \frac{\pi\ell}{2h}$, $\alpha \neq i$ при $n = 1,2$) ($\ell = 0,\pm1,\pm2,\ldots$) для задачи (2.4.1)-(2.4.2) имеет место принцип предельного поглощения.*

Перейдем теперь к изучению нестационарной задачи.

§2.5. Поведение при $t \to +\infty$ решения нестационарной задачи и парциальные условия излучения А.Г.Свешникова для уравнения Гельмгольца с импедансным граничным условием

Рассмотрим нестационарную задачу, соответствующую задаче (2.4.1)-(2.4.2)

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)u(t,x)=f(x)\exp(i\omega t) \tag{2.5.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=0, \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0 \tag{2.5.2}$$

и импедансными граничными условиями

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)u(t,x)\bigg|_{x_{n+1}=\pm h}=0. \tag{2.5.3}$$

Решение задачи (2.5.1)-(2.5.3) определяется как в §1.3. Считая $u(t,x)$ по t как обобщенную функцию над D^+ (см.[27], с.113), докажем следующую теорему.

Теорема 2.5.1. *Пусть* $\omega \neq \frac{\pi\ell}{2h\alpha}$, $\omega \neq \frac{\pi\ell}{2h}$ ($\ell = 0,\pm1,\pm2,\ldots$) α *- вещественное число (при* $n=1,2$, $|\alpha|\neq 1$*),* $f(x)\in C_0^\infty(\Pi)$. *Тогда при* $t\to+\infty$ *для решения задачи (2.5.1)-(2.5.3) имеет место асимптотическое разложение*

$$\exp(-i\omega t)u(t,x) = \vartheta(\omega,x) + \Phi(t,x,\alpha,\omega) + t^{-\frac{n}{2}}\Psi(t,x,\alpha,\omega) + O(t^{-\frac{n}{2}-1})$$

равномерно по x в каждом компакте из Π, где $\vartheta(\omega,x)$ - решение стационарной задачи, выделенное принципом предельного поглощения, а Φ, Ψ ограничены по t,x и определены ниже формулами (2.5.16), (2.5.17) соответственно.

Доказательство. Совершим в (2.5.1)-(2.5.3) преобразование Лапласа по t. Тогда получим следующую задачу

$$(\Delta - k^2)\vartheta(k,x) = \frac{f(x)}{k - i\omega}, \qquad (2.5.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \alpha k\right)\vartheta(k,x)\Big|_{x_{n+1}=\pm h} = 0, \qquad (2.5.5)$$

где $\vartheta(k,x) = u(t,x)$, $\mathcal{L}$ - преобразование Лапласа и $\operatorname{Re} k > 0$. Так как $\operatorname{Im}(ik) \neq 0$, то по результатам предыдущего параграфа функция Грина $G(k,x,y)$ задачи (2.5.4)-(2.5.5) существует и единственна. Для того, чтобы получить функцию Грина этой задачи, заменим в формуле (2.4.8) k на ik, а α на $-i\alpha$. Тогда получим

$$G(k,x,y) = -\frac{ir^{1-\frac{n}{2}}}{4(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times\left[\left(i\sqrt{(1-\alpha^2)k^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} g_0(ik,x_{n+1})g_0(ik,y_{n+1})H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(ir\sqrt{(1-\alpha^2)k^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(i\sqrt{k^2 + \frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1} g_\ell(ik,x_{n+1})g_\ell(ik,y_{n+1})H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(ik_\ell r)\right], \qquad (2.5.6)$$

где $\quad k_\ell = \sqrt{k^2 + \dfrac{\pi^2 \ell^2}{4h^2}}$.

В силу (2.4.9) решение задачи (2.5.4)-(2.5.5) определяется по формуле

$$\vartheta(k,x) = \frac{1}{k - i\omega} \int_{\Pi} \cdots \int G(k,x,y) f(y) d\Pi. \qquad (2.5.7)$$

Решение задачи (2.5.1)-(2.5.3) определяется как обобщенное обратное преобразование Лапласа от $\vartheta(k,x)$ по k . Ряд в (2.5.6) сходится равномерно по k в каждом компакте из полуплоскости $\operatorname{Re} k > 0$ и каждый член этого ряда имеет по k рост не выше степенного. Интегрируя этот ряд почленно по k , получаем, что необходимо исследовать при $t \to +\infty$ асимптотику следующих интегралов.

$$G_0(t,x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{\alpha k \exp[k(t - \alpha(x_{n+1} + y_{n+1}))]}{(k - i\omega) sh 2h\alpha k} \times$$

$$\times \left(i\sqrt{\left(1 - \alpha^2\right)k^2} \right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(ir\sqrt{\left(1 - \alpha^2\right)k^2} \right) dk, \qquad (2.5.8)$$

$$G_{\ell,m}(t,x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{(\alpha k)^m (ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}}{(k - i\omega)\left(\alpha^2 k^2 + \dfrac{\pi^2 \ell^2}{4h^2} \right)} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(ik_\ell r) \exp(kt) dk.$$

$$m = 0,1,2 \qquad (2.5.9)$$

Интегралы в (2.5.8), (2.5.9) понимаются в смысле обобщенного обратного преобразования Лапласа (см.[27], с.99), т.е. если $F(k)$ – аналитическая в полосе $0 < \operatorname{Re} k < a$ функция, такая, что

$$\left|\frac{F(k)}{Q(k)}\right| < \frac{c}{\left|k^2\right|},$$

где $Q(k)$ – полином, не имеющий нулей при $0 < \mathrm{Re}\, k < a$, то обобщенное обратное преобразование Лапласа от $F(k)$ определяется следующим образом

$$\mathcal{L}^{-1} F(k) = \frac{1}{2\pi i} Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{F(k)}{Q(k)} \exp(kt) dk, \qquad (2.5.10)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial t}$ обозначает обобщенное дифференцирование по t, а интеграл в (2.5.10) сходится в обычном смысле. Подинтегральная функция в (2.5.8) имеет простые полюса в точках $k = i\omega$ и $k = i\dfrac{\pi\ell}{2h\alpha}$, ($\ell = \pm1, \pm2, \ldots$). Применяя теорему о вычетах с помощью (2.5.10), получим

$$G_0(t, x, y) = \frac{\alpha i\omega \exp[i\omega(t - \alpha(x_{n+1} + y_{n+1}))]}{sh 2h\alpha i\omega} \times$$

$$\times \left(i|\omega|\sqrt{(\alpha^2 - 1)}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\omega r\sqrt{(\alpha^2 - 1)}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{4h^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu(t, x_{n+1}, y_{n+1}) \nu \left(i\frac{\pi\nu}{2h}\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\frac{\pi\nu}{2h} r\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}\right),$$

где

$$\theta_\nu(t, x_{n+1}, y_{n+1}) = (-1)^\nu \left\{ \frac{\exp\left[i\frac{\pi\ell}{2h}(t - \alpha(x_{n+1} + y_{n+1}))\right]}{\frac{\pi\nu}{2h} - \alpha\omega} + \right.$$

$$
+\frac{\exp\left[-i\frac{\pi\ell}{2h}(t-\alpha(x_{n+1}+y_{n+1}))\right]}{\frac{\pi\nu}{2h}+\alpha\omega}\Bigg\} \qquad (2.5.11)
$$

Ряд в (2.5.11) при $|\alpha|>1$ сходится в обычном смысле, а при $|\alpha|\le 1$ ($|\alpha|\ne 1$ при $n=1,2$) в смысле обобщенных функций.

Подинтегральная функция в выражении $G_{\ell,m}(t,x,y)$ имеет простые полюса в точках $k=i\omega$, $k=\pm i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}$ и ветвление в точках $k=i\frac{\pi\ell}{2h}$. На плоскости k устроим разрез как указано на рис.1. Тогда

$$
G_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{(\alpha i\omega)^m\exp(i\omega t)}{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\alpha^2\omega^2}\times
$$

$$
\times\left(i\sqrt{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(ir\sqrt{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\omega^2}\right)+\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times
$$

$$
\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}r\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)\Phi_{\ell,m}(\alpha,\omega,t)+Q_{\ell,m}(t,x,y), \quad (2.5.12)
$$

где

$$
\Phi_{\ell,m}(\alpha,\omega,t)=\frac{i\alpha}{2}\left(\frac{i\pi\ell}{2h}\right)^{m-1}\times
$$

$$
\times\left[\frac{\exp\left(i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}t\right)}{\alpha\omega-\frac{\pi\ell}{2h}}-\frac{(-1)^m\exp\left(-i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}t\right)}{\alpha\omega+\frac{\pi\ell}{2h}}\right],
$$

$$Q_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\ell}\frac{(\alpha k)^m(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)}{(k-i\omega)\left(\alpha^2k^2+\dfrac{\pi^2\ell^2}{4h^2}\right)}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(ik_\ell r)dk,$$

$$\Gamma_\ell=\Gamma_\ell^+\cup C_\varepsilon^{(1)}\cup\Gamma_\ell^-\cup C_\varepsilon^{(2)},$$

$C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ - окружности радиуса ε с центрами в точках $k=\pm i\dfrac{\pi\ell}{2h}$, $\Gamma_\ell^\pm$ - берега разреза.

Пусть n – нечетное число. Используя соотношение (1.3.10) для нецелых ν, получим

$$Q_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\ell}\frac{(\alpha k)^m(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)}{(k-i\omega)\left(\alpha^2k^2+\dfrac{\pi^2\ell^2}{4h^2}\right)}J_{\frac{n}{2}-1}(ik_\ell r)dk.$$

Изучим теперь асимптотику при $t\to+\infty$ функции $Q_{\ell,m}(t,x',y')$. Для того, чтобы применять метод перевала, участки разреза вблизи точек $k=\pm i\dfrac{\pi\ell}{2h}$ будем считать параллельными вещественной оси. Поскольку интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, то, учитывая значения подинтегральной функции на берегах разреза, получим

$$Q_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_\ell^+}\frac{(\alpha k)^m(ik_\ell)^{\frac{n}{2}-1}\exp(kt)}{(k-i\omega)\left(\alpha^2k^2+\dfrac{\pi^2\ell^2}{4h^2}\right)}J_{\frac{n}{2}-1}(ik_\ell r)dk.$$

Далее, поступая так же, как в §3 главы I, при $t\to+\infty$ получим

$$Q_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{(-\alpha)^m r^{\frac{n}{2}-1} i^{n-2}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\right)^{\frac{n}{2}+m-3} t^{-\frac{n}{2}}}{\pi(1-\alpha^2)}\Psi_\ell(t,\omega,m)+O\left(t^{-\frac{n}{2}-1}\right),$$

где

$$\Psi_\ell(t,\omega,m)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+m-1}\exp\left(i\frac{\pi\ell}{2h}t\right)}{\frac{\pi\ell}{2h}-\omega}+\frac{\exp\left(-i\frac{\pi\ell}{2h}t\right)}{\frac{\pi\ell}{2h}+\omega}. \qquad (2.5.13)$$

Из (2.5.12), (2.5.13) следует, что при $t\to+\infty$

$$G_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{(i\alpha\omega)^m\exp(i\omega t)}{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\alpha^2\omega^2}\times$$

$$\times\left(i\sqrt{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(ir\sqrt{\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}-\omega^2}\right)+\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}r\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)\Phi_{\ell,m}(\alpha,\omega,t)+O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right). \quad (2.5.14)$$

Отметим, что формулы (2.5.11) и (2.5.14) имеют место также для четных n. В этом случае

$$Q_{\ell,m}(t,x',y')=\frac{4(-\alpha)^m\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\right)^{\frac{n}{2}+m-3} i^n r^{\frac{n}{2}-1}}{\pi(1-\alpha^2)}t^{-\frac{n}{2}}\Psi_\ell(t,\omega,m)+O\left(t^{-\frac{n}{2}-1}\right),$$

где $\Psi_\ell(t,\omega,m)$ определяется формулой (2.5.13).

Для решения задачи (2.5.1)-(2.5.3) имеем

$$u(t,x)=G(t,x,y)*f(y),$$

где

$$G(t,x,y)=\mathcal{L}^{-1}G(k,x,y),$$

а $\mathcal{L}^{-1}$ – обобщенное обратное преобразование Лапласа.

Так как ряд в обобщенных функциях можно интегрировать почленно, то

$$u(t,x)=-\frac{i}{4(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}}\Bigg\{\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}G_0(t,x,y)f(y)dy+\frac{1}{h}\times$$

$$\times\sum_{\ell=1}^{\infty}\Bigg[\sin(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}G_{\ell,2}(t,x',y')f(y)\sin(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy-$$

$$-\frac{\pi\ell}{2h}\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}G_{\ell,1}(t,x',y')f(y)\sin[2h-(x_{n+1}+y_{n+1})]\frac{\pi\ell}{2h}dy+$$

$$+\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}G_{\ell,0}(t,x',y')\cos(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy\Bigg]\Bigg\}.$$

(2.5.15)

Введем обозначения

$$a_\ell(x')=\frac{1}{2h}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}f(y)H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}r\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)\cos(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy,$$

$$b_\ell(x')=\frac{1}{2h}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\Pi}\cdots\int r^{1-\frac{n}{2}}f(y)H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}r\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right)\sin(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy,$$

$$c_\ell(x')=a_\ell(x')\sin(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}+b_\ell(x')\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}.$$

Учитывая (2.5.11), (2.5.14) и эти обозначения в (2.5.15) и группируя слагаемые в (2.5.15) нужным образом, получим, что при $t \to +\infty$

$$u(t,x)\exp(-i\omega t) = \vartheta(\omega,x) + \Phi(t,x,\omega,\alpha) +$$

$$+ \Psi'(t,x_{n+1},\omega,\alpha) t^{-\frac{n}{2}} + O\left(t^{-\frac{n}{2}}\right),$$

равномерно по x в каждом компакте из Π, где $\vartheta(\omega,x)$ есть решение задачи (2.4.1)-(2.4.2) при $k=\omega$ и

$$\Phi(t,x,\omega,\alpha) = -\frac{i\exp(-i\omega t)}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi\ell}{2h}\right)^2 \Phi_{\ell,0}(\alpha,\omega,t) a_\ell(x') \cos(h - x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h} +\right.$$

$$\left. + \Phi_{\ell,2}(\alpha,\omega,t) b_\ell(x') \sin(h - x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h} + \frac{\pi\ell}{2h}\Phi_{\ell,1}(\alpha,\omega,t) c_\ell(x')\right] +$$

$$+ \frac{2i}{\alpha}\sum_{\ell=1}^{\infty}\Phi_{\ell,2}(\alpha,\omega,t)[b_\ell(x') + i a_\ell(x')]\exp\left(i(h - x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}\right), \quad (2.5.16)$$

$$\Psi(t,x_{n+1},\omega,\alpha) = \frac{i^{n-1}\exp(-i\omega t)}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}\pi(1-\alpha^2)} \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(i\frac{\pi\ell}{2h}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left[a'_\ell \Psi_\ell(t,\omega,0)\cos(h - x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h} - \right.$$

$$\left. - \alpha^2 b'_\ell \Psi_\ell(t,\omega,2)\sin(h - x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h} - \alpha i c'_\ell \Psi_\ell(t,\omega,1)\right], \quad (2.5.17)$$

где

$$a'_\ell = \frac{1}{2h}\int\cdots\int_\Pi f(y)\cos(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy,$$

$$b'_\ell = \frac{1}{2h}\int\cdots\int_\Pi f(y)\sin(h-y_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dy,$$

$$c'_\ell = a'_\ell\sin(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h} + b'_\ell\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}.$$

Учитывая, что $f(x)\in C_0^\infty(\Pi)$, получаем, что ряды в выражениях $\Phi(t,x,\omega,\alpha)$ и $\Psi(t,x_{n+1},\omega,\alpha)$ сходятся абсолютно, чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание. *Если в (2.5.3) $\alpha=0$ и выполняются остальные условия теоремы 2.5.1, то для задачи (2.5.1)-(2.5.3) имеет место принцип предельной амплитуды.*

Теорема 2.5.1 остается справедливой при $n\geq 3$ и в резонансном случае, т.е. при $\omega=\frac{\pi\ell}{2h}$, но при $n<3$ и $\omega=\frac{\pi\ell}{2h\alpha}$ ($\ell=\pm1,\pm2,\ldots$) решение задачи (2.5.1)-(2.5.3) растет, что следует из следующих теорем.

Теорема 2.5.2. *Пусть $\omega=\frac{\pi\ell}{2h}$, $n=2$ и α - вещественное число, такое, что $|\alpha|\neq 1$. Тогда для решения задачи (2.5.1)-(2.5.3) имеет место следующая оценка*

$$|u(t,x)|\leq C\exp(\varepsilon t),$$

равномерно по x в каждом компакте из Π, $\varepsilon>0$ - достаточно малое число.

Рассуждая также, как при доказательстве теоремы 2.5.1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.5.3. *Пусть* $n = 2$, $\omega = \dfrac{\pi\ell}{2h\alpha}$ ($\ell = \pm 1, \pm 2, \ldots$) *и* α *- вещественное число, такое, что* $|\alpha| \neq 1$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для решения задачи (2.5.1)-(2.5.3) имеет место асимптотическое разложение*

$$\exp\left(-i\frac{\pi\ell}{2h\alpha}t\right)u(t,x) = \frac{i}{4\alpha^2}\left(\frac{\pi\ell}{2h}\right)^2 t \times$$

$$\times\left[a_\ell(x')\sin\frac{\pi\ell}{2h}(h - x_3) + b_\ell(x')\cos(h - x_3)\frac{\pi\ell}{2h}\right] + O(1),$$

равномерно по x *в каждом компакте из* Π. *При* $n = 1$ *в работе [22] показано, что в резонансном случае решение задачи (2.5.1)-(2.5.3) при* $t \to +\infty$ *растет как* $t^{1/2}$.

Рассмотрим в Π однородную краевую задачу с двойственным параметром k

$$(\Delta + k^2)u(k,x) = 0, \tag{2.5.18}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \alpha k\right)u(k,x)\bigg|_{x_{n+1}=\pm h} = 0 \tag{2.5.19}$$

Покажем, что решение задачи (2.5.18)-(2.5.19), удовлетворяющее на бесконечности парциальным условиям излучения, есть тождественный нуль. Пусть Π_τ боковая поверхность кругового прямого цилиндра с торцами, состоящими из кругов, лежащими на плоскостях $x_{n+1} = \pm h$ с центрами в точках $(x', \pm h)$, радиусами τ.

Для решения задачи (2.5.18)-(2.5.19) имеет место формула Грина

$$u(k,x)=\int_{\Pi_\tau}\cdots\int\left(G_1\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial G_1}{\partial r}\right)dM_\tau,$$

где

$$G_1=G+\mathcal{H},$$

$$\mathcal{H}(x,y)=-\frac{ir^{1-\frac{n}{2}}}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}}\sum_{\ell=0}^{\mu}\gamma_\ell g_\ell(k,x_{n+1})g_\ell(k,y_{n+1})J_{\frac{n}{2}-1}(k_\ell r),$$

регулярное решение задачи (2.5.18)-(2.5.19) в Π, μ - любое натуральное число, γ_ℓ - постоянные, $k_0=\sqrt{(1+\alpha^2)k^2}$.

Обозначим

$$W_\ell(r)=-\frac{i}{4}\left(\frac{k_\ell}{2\pi r}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left[(\gamma_\ell+1)H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(k_\ell r)+\gamma_\ell H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(k_\ell r)\right]. \quad (2.5.20)$$

Так как ряды в выражениях G и $\frac{\partial G}{\partial r}$ сходятся равномерно по r при $r\geq c_0>0$, то

$$u(k,x)=\sum_{\ell=0}^{\infty}g_\ell(k,x_{n+1})\int_{S_\tau}\left[W_\ell(r)\frac{\partial u_\ell(y')}{\partial r}-u_\ell(y')\frac{\partial W_\ell(r)}{\partial r}\right]dS_\tau, \quad (2.5.21)$$

где

$$u_\ell(k,x') = \int_{-h}^{h} u(x) g_\ell(k,x_{n+1}) dx_{n+1},$$

S_τ - сфера радиуса τ на Π_τ с центром в точке $(x',0)$.

Рассмотрим следующие парциальные условия излучения А.Г.Свешникова

$$\left(\frac{\partial}{\partial|y'|} - ik_\ell\right) u_\ell(k,y') = O\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right),$$
$$\ell = 0,1,2,\dots,\nu, \quad \nu = \left[\frac{2h|k|}{\pi}\right], \tag{2.5.22}$$

где квадратная скобка означает целую часть.

Покажем, что функции $u_0(k,x')$ и $u_\ell(k,x')$, $\ell = 1,2,\dots$ в R_n соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\left[\Delta_n + (\alpha^2+1)k^2\right] u_0(k,x') = 0, \tag{2.5.23}$$

$(\Delta + k_\ell^2) u_\ell(k,x') = 0.$

Рассмотрим сперва $\ell \neq 0$. При $\ell = 0$ доказательство аналогично. Пусть $u(k,x)$ есть решение задачи (2.5.18) и (2.5.19). Умножая (2.5.18) и (2.5.19) на $g_\ell(k,x_{n+1})$ и интегрируя по x_{n+1} в пределах [-h, h], получим

$$\int_{-h}^{h} (\Delta + k^2) u(k,x) g_\ell(k,x_{n+1}) dx_{n+1} =$$

$$=(\Delta+k^2)u_\ell(k,x')+\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u(k,x)}{\partial x_{n+1}^2}g_\ell(k,x_{n+1})dx_{n+1}=0. \quad (2.5.24)$$

Подставляя в (2.5.24) вместо $g_\ell(k,x_{n+1})$ его выражение и интегрируя по x_{n+1} дважды по частям, получим

$$\alpha k\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u(k,x)}{\partial x_{n+1}^2}\sin(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dx_{n+1}=\alpha k\frac{\pi\ell}{2h}\times$$

$$\times\left[u(k,x',h)-(-1)^\ell u(k,x',-h)-\frac{\pi\ell}{2h}\int_{-h}^{h}u(k,x)\sin\frac{\pi\ell}{2h}(h-x_{n+1})dx_{n+1}\right].$$

$$(2.5.25)$$

Аналогичным образом

$$\frac{\pi\ell}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u(k,x)}{\partial x_{n+1}^2}\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dx_{n+1}=$$

$$=\frac{\pi\ell}{2h}\left[\frac{\partial u(k,x',h)}{\partial x_{n+1}}-(-1)^\ell\frac{\partial u(k,x',-h)}{\partial x_{n+1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}\int_{-h}^{h}u(k,x)\cos(h-x_{n+1})\frac{\pi\ell}{2h}dx_{n+1}\right]. \quad (2.5.26)$$

Учитывая краевые условия (2.5.19) в (2.5.26), из (2.5.25) и (2.5.26) получим

$$\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 u(k,x)}{\partial x_{n+1}^2}g_\ell(k,x_{n+1})dx_{n+1}=-\frac{\pi^2\ell^2}{4h^2}u_\ell(k,x'). \quad (2.5.27)$$

Из (2.5.24) и (2.5.27) следует доказательство второго из равенств (2.5.23). Случай $\ell = 0$ доказывается аналогичным образом. Имеет место следующая теорема

Теорема 2.5.1. *Решение задачи (2.5.18)-(2.5.19), удовлетворяющее на бесконечности условиям (2.5.22)* $k \neq \frac{\pi\ell}{2h}$ (*при* $n = 1,2,$ $k \neq \frac{\pi\ell}{2h}$, $\alpha \neq i$) ($\ell = 0,1,2,\ldots$), *есть только тривиальное решение*.

Доказательство. Фиксируем точку $x = x_0 \in \Pi$ и рассмотрим

$$u_\ell(k, x_0') = \int_{S_r}\left[W_\ell(r)\frac{\partial u_\ell(k,y')}{\partial r} - u_\ell(k,y')\frac{\partial W_\ell(r)}{\partial r}\right]dS_r. \quad (2.5.28)$$

Так как $u_\ell(k,y')$ удовлетворяет уравнениям (2.5.23) и условию (2.5.22), то, в силу результатов [26], имеем $\gamma_\ell = 0,\ \ell = 0,1,2,\ldots,\nu$, т.е. $u_\ell(k,y')$ являются функциями первой категории и для них на бесконечности имеет место оценка

$$\begin{gathered} u_\ell(k,y') = \exp(ik_\ell|y'|)O\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right), \\ \ell = 0,1,2,\ldots,\nu; \quad \nu = \left[\frac{2h|k|}{\pi}\right]. \end{gathered} \quad (2.5.29)$$

Далее, поступая так же, как в §1.4, получим, что

$$\begin{gathered} u_\ell(k,x') = 0, \\ \ell = \nu+1, \nu+2, \ldots \end{gathered} \quad (2.5.30)$$

Рассмотрим теперь $u_\ell(k,x')$ при $\ell=0,1,\ldots,\nu$. Учитывая, что $\gamma_\ell=0$, $\ell=0,1,2,\ldots,\nu$, получаем

$$W_\ell(r)=-\frac{i}{4}\left(\frac{k_\ell}{2\pi r}\right)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(k_\ell r). \qquad (2.5.31)$$

Из формулы дифференцирования функции Ханкеля и асимптотики (1.1.5) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-ik_\ell\right)W_\ell(r)=\exp(ik_\ell r)O\left(r^{-\frac{n+1}{2}}\right). \qquad (2.5.32)$$

Поскольку при больших $|y'|$

$$\frac{\partial|y'|}{\partial r}=1+O(|y'|^{-1}),$$

то

$$\frac{\partial u_\ell(k,y')}{\partial r}=\frac{\partial u_\ell(k,y')}{\partial|y'|}\left(1+O\left(\frac{1}{|y'|}\right)\right).$$

Следовательно, из (2.5.28) получим,

$$u_\ell(k,x_0')=\int\limits_{S_r}\left[W_\ell(r)\frac{\partial u_\ell(k,y')}{\partial|y'|}-u_\ell(k,y')\frac{\partial W_\ell(r)}{\partial r}\right]dS_r+$$

$$+\int_{S_\tau} W_\ell(r)\frac{\partial u_\ell(k,y')}{\partial|y'|}O\left(\frac{1}{|y'|}\right)dS_\tau \equiv J_1(k,x_0')+J_2(k,x_0').\ (2.5.33)$$

Из (2.5.22) и (2.5.29), (2.5.31), (2.5.32) следует, что

$$J_1(k,x_0')=\int_{S_\tau}\left[W_\ell(r)\exp(ik_\ell|y'|)o\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right)\right.$$

$$\left.-u_\ell(k,y')\exp(ik_\ell r)O\left(r^{-\frac{n+1}{2}}\right)\right]dS_\tau=$$

$$=\left[k_\ell^{\frac{n-3}{2}}o(1)+O(r^{-1})\right]\exp(2ik_\ell r). \qquad (2.5.34)$$

Аналогичным образом из (2.5.22), (2.5.29), (2.5.31) получаем

$$J_2(k,x_0')=k_\ell^{\frac{n-3}{2}}\int_{S_\tau}r^{-\frac{n-1}{2}}\exp(ik_\ell r)O\left(|y'|^{-1}\right)\times$$

$$\times\left[o\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right)+\exp(ik_\ell r)O\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right)\right]dS_\tau=$$

$$=k_\ell^{\frac{n-3}{2}}\int_{S_\tau}r^{-\frac{n-1}{2}}\left[o\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right)+O\left(|y'|^{\frac{1-n}{2}}\right)\right]dS_\tau=O(r^{-1}). \qquad (2.5.35)$$

Устремляя $\tau\to\infty$, из (2.5.33)-(2.5.35) получаем, что

$$u_\ell(k, x_0') = 0, \qquad \ell = 0,1,2,\ldots,\nu. \tag{2.5.36}$$

Из (2.5.30) и (2.5.36) получаем, что

$$u_\ell(k, x_0') = 0, \qquad \ell = 0,1,2,\ldots \tag{2.5.37}$$

А из (2.5.21), (2.5.28) и (2.5.37) получаем, что

$$u_\ell(k, x_0) = 0.$$

В силу произвольности точки x_0 из Π получаем доказательство теоремы.

Г Л А В А III

ПРИНЦИПЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе принципы излучения изучены для краевой задачи в многомерном цилиндре для эллиптического уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Эти результаты имеют место и для эллиптических уравнений, коэффициенты у производных по поперечным переменным которых есть гладкие функции от этих же переменных.

§3.1. Построение функции Грина задачи (3.1.1)-(3.1.2) и принцип предельного поглощения

Пусть $Ц = \Omega \times R_n(x)$ - цилиндрическая область в $R_m(y) \times R_n(x)$, где Ω - ограниченная область в евклидовом пространстве $R_m(y)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ - точка $R_m(y)$, а $R_n(x)$ - такое же пространство с точкой $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Здесь всюду будем предполагать, что $\partial\Omega$ - бесконечно гладкая поверхность в R_m.

Рассмотрим в $Ц$ следующую задачу

$$L_0 u \equiv P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(k, x, y) + k^2 u(k, x, y) = f(x, y), \qquad (3.1.1)$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \bar{n}^j}\right|_{\partial Ц} = 0, \qquad j = 0, 1, ..., N-1, \qquad (3.1.2)$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$; $\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)$, $P(is, iz) =$ $= P_0(is) + P_1(iz)$ - степени однородности 2N отрицательно определенный эллиптический многочлен, причем $P_0(is) = c_0|s|^{2N}$, $c_0 < 0$ - константа, k^2 – вещественное число, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к боковой поверхности цилиндра $Ц$. Так как $f(x,y)$ будем считать достаточно гладкой функцией, то решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) будет классическое решение. Отметим, что разрешимость задачи (3.1.1)-(3.1.2) другими методами также изучена в работах [47], [48].

Наряду с задачей (3.1.1)-(3.1.2) рассмотрим следующую задачу с комплексным параметром $k_\varepsilon^2 = k^2 + i\varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$ - число

$$\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) + k_\varepsilon^2\right] u(k_\varepsilon, x, y) = f(x,y), \qquad (3.1.1)'$$

$$\left.\frac{\partial^j u(k_\varepsilon, x, y)}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial Ц} = 0, \quad j = 0,1,\dots,N-1, \qquad (3.1.2)'$$

Считая $u(k_\varepsilon, x, y)$ обобщенной функцией над $D(Ц)$, совершим в (3.1.1)′-(3.1.2)′ преобразование Фурье по x. Тогда получим следующую задачу

$$\left[P\left(is, \frac{\partial}{\partial y}\right) + k_\varepsilon^2\right] \hat{u}(k_\varepsilon, s, y) = \hat{f}(s,y) \qquad (3.1.3)$$

$$\left.\frac{\partial^j \hat{u}}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 0,1,\dots,N-1, \qquad (3.1.4)$$

здесь $\hat{u}(k_\varepsilon, s, y) = F_{x\to s} u(k_\varepsilon, x, y)$, $F_{x\to s}$ - преобразование Фурье.

Рассмотрим оператор $L_1 = -P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ с областью определения

$$D(L_1) = \left[\vartheta : \vartheta(y) \in H^{2N}(\Omega), \left.\frac{\partial^j \vartheta(y)}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 0,1,\dots,N-1 \right].$$

Дифференциальное выражение L_1 с областью определения $D(L_1)$ порождает положительно определенный самосопряженный оператор $\widetilde{L}$ в $L_2(\Omega)$. Обозначим через λ_μ собственные значения оператора $\widetilde{L}$, а через $\varphi_\mu(y)$ соответствующие собственные функции. Приведем из [28] (с.195) следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть положительно определенный оператор таков, что всякое множество функций, нормы энергии которых ограничены в совокупности, компактно в смысле сходимости в среднем. Тогда:*

а) оператор имеет бесконечное множество собственных чисел:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_\mu \le \dots;\quad \lim_{\mu\to\infty} \lambda_\mu = +\infty,$$

б) соответствующие собственные функции образуют систему полную как по энергии, так и в смысле сходимости в среднем.

Замечание. Отметим, что в сепарабельном гильбертовом пространстве полная ортонормированная система функций образует базис. Поэтому любую функцию $f(x) \in L_2(\Omega)$ можно разложить в ряд Фурье по системе функций $\{\varphi_\mu(y)\}$ оператора $\widetilde{L}$.

Теорема 3.1.2. *Для функции Грина задачи (3.1.1)′-(3.1.2)′ с комплексным параметром k_ε^2 имеет место представление*

$$G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z) = \frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(y)\varphi_\mu(z) \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x-\xi|\eta_{\nu\mu}),$$

где

$$\eta_{\nu\mu} = |\zeta_\mu|^{\frac{1}{2N}} \exp\left[i\left(\frac{1}{2N}\arg\zeta_\mu + \frac{\pi}{N}\nu\right)\right],$$

$$\zeta_\mu = k_\varepsilon^2 - \lambda_\mu.$$

Доказательство. Так как при $\varepsilon \neq 0$. $\lambda_\mu \neq k_\varepsilon^2 + P_0(is)$, то тогда решение задачи (3.1.3)-(3.1.4) определяется по формуле

$$\hat{u}(k_\varepsilon, s, y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{c_\mu(s)\varphi_\mu(y)}{\lambda_\mu - [P_0(is) + k_\varepsilon^2]}, \tag{3.1.5}$$

где

$$c_\mu(s) = \int_\Omega \hat{f}(s,z)\varphi_\mu(z)dz, \tag{3.1.6}$$

$$\hat{f}(s,z) = F_{x\to s}[f(x,y)] \tag{3.1.7}$$

$F_{x\to s}$ - преобразование Фурье.

Отметим, что λ_μ и $\varphi_\mu(y)$ от s не зависят. Решение задачи (3.1.1)′-(3.1.2)′ определяется как обратное преобразование Фурье от $\hat{u}(k_\varepsilon, s, y)$ по s.

$$u(k_\varepsilon, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} \hat{u}(k_\varepsilon, s, y)\exp[-i(x,s)]ds =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\mu(y) \int_{R_n} \frac{c_\mu(s)\exp[-i(x,s)]}{\lambda_\mu - [P_0(is) + k_\varepsilon^2]} ds. \tag{3.1.8}$$

Здесь почленное интегрирование законно в силу сходимости ряда (3.1.5) в среднем. Учитывая (3.1.6) и (3.1.7), получим

$$u(k_\varepsilon,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(y)\int_{R_n}\left[\int_{R_n}\frac{\exp[i(\xi-x,s)]ds}{\lambda_\mu-(P_0(is)+k_\varepsilon^2)}\right]f_\mu(\xi)d\xi, \quad (3.1.9)$$

где

$$f_\mu(\xi)=\int_\Omega f(\xi,z)\varphi_\mu(z)dz. \qquad (3.1.10)$$

Обозначим

$$J_\mu(k_\varepsilon,\xi-x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R_n}\frac{\exp[i(\xi-x,s)]}{\lambda_\mu-[P_0(is)+k_\varepsilon^2]}ds.$$

Этот интеграл в обычном смысле, вообще говоря, не существует. Придадим смысл этому интегралу и вычислим его. Применяя теорию обобщенных функций для произвольной $\varphi(x)\in C_0^\infty(R_n)$, имеем

$$\left(J_\mu(k_\varepsilon,x),\varphi(x)\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\left(\frac{1}{\lambda_\mu-P_0(is)-k_\varepsilon^2},F^{-1}\varphi\right)=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|s|\le r}\frac{ds}{\lambda_\mu-P_0(is)-k_\varepsilon^2}\int_{R_n}\varphi(x)\exp[-i(s,x)]dx.$$

Меняя порядок интегрирования, что законно ввиду абсолютной сходимости $2n$-кратного интеграла, получим

$$\left(J_\mu(k_\varepsilon,x),\varphi(x)\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\lim_{r\to\infty}\int_{R_n}|x|^{1-\frac{n}{2}}\varphi(x)dx\times$$

$$\times\int_0^r\frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu-P_0(is)-k_\varepsilon^2}j_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s|.$$

Отсюда, в силу произвольности функции $\varphi(x)$, получим

$$J_\mu(k_\varepsilon, x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1}} |x|^{1-\frac{n}{2}} \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} j_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|) d|s|.$$

Введем следующую функцию

$$\Phi_\mu(r, x) = \int_0^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} j_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|) d|s|.$$

Вычислим $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi_\mu(r, x)$. Пусть n – нечетное число. Тогда $z^{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}-1}(z)$ есть четная целая функция. Поэтому

$$\Phi_\mu(r, x) = \frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} j_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|) d|s|.$$

Используя известное равенство (см.[29], с.175)

$$j_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)\right],$$

получим

$$\Phi_\mu(r, x) = \frac{1}{4} \int_{-r}^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} \times$$

$$\times \left[H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(|x||s|) + H_{\frac{n}{2}-1}^{(2)}(|x||s|)\right] d|s| \equiv \Phi_\mu^I(r, x) + \Phi_\mu^{II}(r, x).$$

Рассмотрим корни уравнения

$$\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2 = 0, \qquad \text{здесь} \quad P_0(is) = c_0|s|^{2N}. \qquad (3.1.11)$$

Отсюда

$$\eta_{\nu\mu} = \left|\frac{\lambda_\mu - k_\varepsilon^2}{c_0}\right|^{\frac{1}{2N}} \exp\left[i\left(\frac{1}{2N}\arg\frac{\lambda_\mu - k_\varepsilon^2}{c_0} + \frac{\pi}{N}\nu\right)\right], \qquad (3.1.12)$$

где $c_0 = P_0\left(i\frac{s}{|s|}\right)$ от s не зависит. Не умаляя общности, положим $c_0 = -1$.

Корни уравнения (3.1.11) простые, они расположены симметрично относительно начала координат – N корней расположены в верхней полуплоскости, а N корней в нижней полуплоскости и

$$\eta_{0\mu} = -\eta_{N\mu}, \eta_{1\mu} = -\eta_{N+1,\mu}, \dots, \eta_{N-1,\mu} = -\eta_{2N-1,\mu}. \quad (3.1.13)$$

По теореме Коши

$$\Phi_\mu^l(r,x) = \frac{1}{4}\int_{-r}^{r} \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s| =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1} \underset{|s|=\eta_{\nu\mu}}{Выч} \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|) +$$

$$+ \frac{1}{4}\int_{c_r} \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is) - k_\varepsilon^2} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s|,$$

где c_r - полуокружность в верхней полуплоскости с центром в начале координат и радиуса r. Учитывая асимптотику функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ при больших $|z|$, получим, что интеграл по c_r стремится к нулю при $r \to \infty$. Тогда

$$\Phi^{I}_{\mu}(x)=\lim_{r\to\infty}\Phi^{I}_{\mu}(r,x)=\frac{\pi i}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right).$$

Аналогичным образом,

$$\Phi^{II}_{\mu}(x)=\lim_{r\to\infty}\Phi^{II}_{\mu}(r,x)=-\frac{\pi i}{4N}\sum_{\nu=N}^{2N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right).$$

Учитывая (3.1.13) и

$$H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(-z)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$$

(см.[29], с.218), получим, что

$$\Phi^{I}_{\mu}(x)=\Phi^{II}_{\mu}(x).$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty}\Phi_{\mu}(r,x)=\frac{\pi i}{2N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right). \quad (3.1.14)$$

Подставляя это выражение в $J_{\mu}(k_{\varepsilon},x)$, получим

$$J_{\mu}(k_{\varepsilon},x)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|x|^{1-\frac{n}{2}}}{4N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right). \quad (3.1.15)$$

Пусть теперь n – четное число. Тогда, выразив функцию Бесселя через функции Ханкеля и устроив разрез $(-\infty,0)$, получим

$$\Phi_\mu(r,x)=\frac{1}{2}\left[\int_0^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is)-k_\varepsilon^2} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s| +\right.$$

$$\left.+\int_0^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is)-k_\varepsilon^2} H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s|\right]$$

Учитывая

$$z^{\frac{n}{2}} H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(z)=(-z)^{\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(-z),$$

получим

$$\Phi_\mu(r,x)=\frac{1}{2}\int_{-r}^r \frac{|s|^{\frac{n}{2}}}{\lambda_\mu - P_0(is)-k_\varepsilon^2} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x||s|)d|s|.$$

Поступая как и выше, при четном n получим также (3.1.14), а затем (3.1.15). Подставляя (3.1.15) в (3.1.9) и учитывая (3.1.10), получим

$$u(k_\varepsilon,x,y)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N}\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(y)\times$$

$$\times\left[\int_{R_n}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x-\xi|\eta_{\nu\mu})\int_\Omega f(\xi,z)dz\right]d\xi=$$

$$=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N}\int\cdots\int_{Ц}\sum_{\mu=1}^{\infty}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}\varphi_\mu(y)\varphi_\mu(z)\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(|x-\xi|\eta_{\nu\mu})f(\xi,z)dЦ.$$

Следовательно, функция

$$G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z) = \frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N} \times$$

$$\times \sum_{\mu=1}^{\infty} |x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} \varphi_\mu(y)\varphi_\mu(z) \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\eta_{\nu\mu}\right),$$

есть функция Грина задачи (3.1.1)-(3.1.2) с комплексным параметром k_ε^2. Теорема доказана.

Лемма 3.1.1. *Для решения задачи (3.1.1)-(3.1.2) с комплексным параметром* k_ε^2 *имеет место представление*

$$u(k_\varepsilon, x, y) = \int_{\text{Ц}}\cdots\int G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z) f(\xi, z)d\text{Ц}, \quad (3.1.17)$$

где $G(k_\varepsilon, x-\xi, y, z)$ *определяется формулой (3.1.16).*

Теорема 3.1.3. *Если* $f(x,y)$ *- финитная бесконечно дифференцируемая функция, то для задачи (3.1.1)-(3.1.2) имеет место принцип предельного поглощения при следующих условиях:*

1) *если* $n \le 2N$, *то* $k^2 \ne \lambda_\mu$,

2) *если* $n > 2N$, *то допускается также* $k^2 = \lambda_\mu$.

Доказательство. Сперва выясним при $\varepsilon = 0$ при каких соотношениях между n и $2N$ функция Грина $G(k_\varepsilon, x, y, z)$ имеет смысл. Пусть n – нечетное число. Тогда из разложения функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ для нецелых порядков (см.[29], с.168, 175) следует, что

$$J_\mu(k,n,N,x) \equiv \sum_{\nu=0}^{N-1} \eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right) =$$

$$
=\frac{1}{i\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}\left(\frac{|x|}{2}\eta_{\nu\mu}\right)^{-\frac{n}{2}+2\ell+1}}{\ell!\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\ell+2\right)}+
$$

$$
+\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}\left(\frac{|x|}{2}\eta_{\nu\mu}\right)^{\frac{n}{2}-1+2\ell}}{\ell!\Gamma\left(\frac{n}{2}+\ell\right)}. \qquad (3.1.18)
$$

В силу равномерной сходимости рядов в (3.1.18) при $x \neq 0$ в этом разложении можно менять порядок суммирования. Тогда

$$
J_{\mu}(k,n,N,x)=\frac{1}{i\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{2\ell+2-2N}\right)\frac{(-1)^{\ell}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-\frac{n}{2}+2\ell+1}}{\ell!\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\ell+2\right)}+
$$

$$
+\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n-2N+2\ell}\right)\frac{(-1)^{\ell}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1+2\ell}}{\ell!\Gamma\left(\frac{n}{2}+\ell\right)}. \qquad (3.1.19)
$$

В доказательстве леммы 3.2.3 будет показано, что

$$
\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{-2N+2\ell+2}=\frac{1}{2}(-1)^{\ell}(\lambda_{\mu}-k^{2})^{\ell}, \quad \ell=0,1,2,\ldots \qquad (3.1.20)
$$

Поэтому в (3.1.19) первая сумма равна нулю при $k^2=\lambda_{\mu}$, а вторая сумма при $k^2=\lambda_{\mu}$ имеет смысл, если только $n>2N$. В случае $n<2N$ предполагается, что $k^2 \neq \lambda_{\mu}$.

Рассмотрим случай четного n. Тогда из разложения $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ для целых порядков получим (см. [29], с.177)

$$J_\mu(k,n,N,x) = -\frac{i}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}-2}\frac{\left(\frac{n}{2}-\ell-2\right)!}{\ell!}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{2\ell-\frac{n}{2}+1}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{-2N+2\ell+2} +$$

$$+\frac{2i}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell\left(\frac{|x|}{2}\right)^{\frac{n}{2}+2\ell-1}}{\ell!\Gamma\left(\frac{n}{2}+\ell\right)}\left(\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{n-2N+2\ell}\ln\frac{\eta_{\nu\mu}|x|}{2}\right) \qquad (3.1.21)$$

В силу (3.1.20) первая сумма в (3.1.21) равна нулю при $k^2=\lambda_\mu$. Вторая сумма при $k^2=\lambda_\mu$ имеет смысл, если только $n>2N$. В случае $n\le 2N$ предполагается $k^2\ne\lambda_\mu$. Таким образом, при $n>2N$ $k^2=\lambda_\mu$ допускается, а при $n\le 2N$ $k^2\ne\lambda_\mu$. Учитывая асимптотику функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ при $z\to\infty$, $x-\xi\ne 0$, получаем, что ряд в (3.1.16) относительно ε равномерно сходится. Аналогичными свойствами обладают производные функции Грина. Поэтому, если перейти к пределу при $\varepsilon\to\infty$ в (3.1.17) и ее производных, входящих в уравнение (3.1.1) при указанных соотношениях между n и $2N$, получаем, что $u(k,x,y)$ удовлетворяет предельной задаче, т.е. задаче (3.1.1)-(3.1.2). Теорема доказана.

Отметим, что эти результаты для уравнения Гельмгольца в случае полосы были получены в работе [22].

§3.2. Принцип предельной амплитуды

Рассмотрим в $\widetilde{M}=(0,+\infty)\times Ц$ следующую нестационарную задачу, соответствующую задаче (1.1.1)-(1.1.2)

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2}=\left[P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]u(t,x,y)-f(x,y)\exp(i\omega t), \quad (3.2.1)$$

$$u(0,x,y)=0, \qquad \frac{\partial u(0,x,y)}{\partial t}=0, \qquad (3.2.2)$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial Ц\times[0,+\infty)}=0, \qquad j=0,1,2,\ldots,N-1, \qquad (3.2.3)$$

где $f(x,y)\in C_0^\infty(Ц)$, ω - вещественное число, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к боковой поверхности $\partial Ц$ цилиндра $Ц$.

Считая $u(t,x,y)$ по t как обобщенную функцию над пространством D. (см. [40], с.113) и совершив в (3.2.1)-(3.2.3) преобразование Лапласа по t, получим следующую задачу

$$\left[P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)-k^2\right]\widetilde{u}(k,x,y)=\frac{f(x,y)}{k-i\omega}, \qquad (3.2.4)$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \vec{n}^j}\right|_{\partial Ц}=0, \qquad j=0,1,\ldots,N-1, \qquad (3.2.5)$$

где $\widetilde{u}=\mathcal{L}u(t,x,y)$, $\operatorname{Re}k>0$ и $\mathcal{L}$ есть обобщенное преобразование Лапласа. Используя результаты §3.1, находим, что решение задачи (3.2.4)-(3.2.5) имеет вид

$$\widetilde{u}(k,x,y)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N}\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(y)\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\times$$

$$\times \int_{R_n} |x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right) \frac{f_\mu(\xi)d\xi}{k-i\omega},$$

где

$$\overline{\eta}_{\nu\mu} = \left|-(\lambda_\mu + k^2)\right|^{\frac{1}{2N}} \exp\left\{ i\left[\frac{1}{2N}\arg(-\lambda_\mu - k^2) + \frac{\pi}{N}\nu\right]\right\},$$
$$\nu = 0,1,2,\ldots,N-1. \qquad (3.2.6)$$

Решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) определяется как обобщенное обратное преобразование Лапласа от $\widetilde{u}(k,x,y)$

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \widetilde{u}(k,x,y)\exp(kt)dk = \left[4N(2\pi)^{1+\frac{n}{2}}\right]^{-1} \times$$
$$\times \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\int_{R_n}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} \times\right.$$
$$\left.\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)\frac{\exp(kt)}{k-i\omega} f_\mu(\xi)dkd\xi\right]\varphi_\mu(y), \qquad (3.2.7)$$

где

$$f_\mu(\xi) = \int_\Omega f(\xi,y)\varphi_\mu(y)dy.$$

Для дальнейших целей введем следующее обозначение

$$G_\mu(x-\xi,t) = \sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)\times$$
$$\times\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk, \ \mu = 1,2,3,\ldots \qquad (3.2.8)$$

Будем использовать асимптотику функций $G_\mu(x-\xi,t)$ при $t\to+\infty$. Докажем следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\beta \geq 0$ *- целое число,* $a > 0$

$$F(t) = \int_0^a x^\alpha \ln^\beta x \exp(-xt)dx. \qquad (3.2.9)$$

Тогда при $t \to \infty$

$$F(t) = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta} (-1)^{\beta-j} c_j \ln^{\beta-j} t + O\{\exp[(-a+\varepsilon)t]\},$$

где

$$c_j = \int_0^\infty y^\alpha \ln^j y \exp(-y)dy,$$

а $\varepsilon > 0$ *- достаточно малое число.*

Доказательство. Сделаем в (3.2.9) замену $x \cdot t = y$. Тогда

$$F(t) = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \int_0^{at} y^\alpha \left[\ln^\beta y - \beta \ln^{\beta-1} y \ln t + \ldots + (-1)^\beta \ln^\beta t\right] \exp(-y)dy =$$

$$= \frac{1}{t^{1+\alpha}} \sum_{j=0}^{\beta} (-1)^{\beta-j} c_j \ln^{\beta-j} t + O\{\exp[(-a+\varepsilon)t]\}.$$

Отсюда следует доказательство леммы.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $-2 < \alpha$, $\beta \geq 0$ *- целое число,* $a > 0$ *и*

$$F^{(1)}(t) = \int_0^a [\exp(-xt) - 1] x^\alpha (\ln x)^\beta dx. \qquad (3.2.10)$$

Тогда при $t \to +\infty$

$$F^{(I)}(t)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\beta}\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}}\left[\ln^{\beta}t+O(\ln^{\beta-1}t)\right] & при\quad -2<\alpha<-1,\\ \dfrac{(-1)^{\beta+1}}{\beta+1}\ln^{\beta+1}t+O(\ln^{\beta}t) & при\quad \alpha=-1,\\ O(1) & при\quad -1<\alpha.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\alpha\neq-1$. Интегрируя по частям в (3.2.10), получим

$$F^{(I)}(t)=\left[\exp(-at)-1\right]\theta(a)+t\int_{0}^{a}\theta(x)\exp(-xt)dx,\quad (3.2.11)$$

где

$$\theta(x)=x^{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\beta}\frac{(-1)^{j}\beta!\ln^{\beta-j}x}{(\beta-j)!(\alpha+1)^{j+1}}.$$

Подставляя $\theta(x)$ в (3.2.11), получим

$$F^{(I)}(t)=\left[\exp(-at)-1\right]\theta(a)+t\sum_{j=0}^{\beta}\frac{(-1)^{j}\beta!}{(\beta-j)!(\alpha+1)^{j+1}}F_{j}(t),\quad (3.2.12)$$

где

$$F_{j}(t)=\int_{0}^{a}x^{\alpha+1}\ln^{\beta-j}x\exp(-xt)dx.$$

Как видно из (3.2.12), наибольший вклад в (3.2.11) при $t\to+\infty$ и $-2<\alpha<-1$ вносит $F_0(t)$, а при $-1<\alpha$ $\theta(a)$. Из (3.2.11), (3.2.12) следует доказательства первой и третьей части леммы.

Рассмотрим теперь случай $\alpha=-1$. Тогда (3.2.11) примет следующий вид

$$F^{(I)}(t)=\frac{1}{\beta+1}\left[\exp(-at)-1\right]\ln^{\beta+1}a+$$

$$+\frac{t}{\beta+1}\int_0^a \exp(-xt)\ln^{\beta+1} x dx. \qquad (3.2.13)$$

Применим к интегралу (3.2.13) лемму 3.2.1. Тогда получим

$$F^{(1)}(t)=\frac{(-1)^{\beta+1}}{\beta+1}\ln^{\beta+1} t+O(\ln^{\beta} t).$$

Из этой асимптотики следует доказательство леммы.

Замечание. В леммах 3.2.1 и 3.2.2 вместо функции x^{α} можно взять функцию, регулярную в отрезке $0<x\le a$, а в окрестности точки $x=0$ представляющуюся в виде

$$f(x)=x^{\alpha}\left(a_0+a_1x+\ldots\right).$$

Теорема 3.2.1. *Для* $G_{\mu}(x-\xi,t)$ *имеет место следующее представление*

$$G_{\mu}(x-\xi,t)=2\pi i\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}(\lambda_{\mu},i\omega)\times$$
$$\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}(\lambda_{\mu},i\omega)\right)\exp(i\omega t)+G^{(2)}_{\mu}(x-\xi,t),$$

где $G^{(2)}_{\mu}(x-\xi,t)$ *определяется формулой (3.2.14). Асимптотика функции* $G^{(2)}_{\mu}(x-\xi,t)$ *при* $t\to+\infty$ *для нечетных* n *определяется формулами (3.2.35), (3.2.36), а для четных* n *- формулами (3.2.35), (3.2.46).*

Доказательство. Учитывая (3.2.6) и асимптотику функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ при больших $|z|$, получаем, что интегралы в (3.2.8) сходятся. Устроим на плоскости k разрез $(-i\lambda_{\mu}^{1/2}, i\lambda_{\mu}^{1/2})$ так, чтобы берега разреза $\Gamma^{+}_{\mu},\Gamma^{-}_{\mu}$

находились на левой полуплоскости и участки разреза вблизи точек ветвления $k = \pm i\lambda_\mu^{1/2}$ были параллельными вещественной оси. Рассмотрим контур

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^+ \bigcup C_\varepsilon^{(1)} \bigcup \Gamma_\mu^- \bigcup C_\varepsilon^{(2)},$$

где $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ - окружности радиуса ε с центрами соответственно в точках $k = i\lambda_\mu^{1/2}, k = -i\lambda_\mu^{1/2}$. Применяя теорему Коши, можно показать, что

$$G_\mu(x-\xi,t) = G_\mu^{(1)}(x-\xi,t) + G_\mu^{(2)}(x-\xi,t),$$

где

$$G_\mu^{(1)}(x-\xi,t) = 2\pi i \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}(\lambda_\mu, i\omega) H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}(\lambda_\mu, i\omega)\right)\exp(i\omega t);$$

$$G_\mu^{(2)}(x-\xi,t) = \int_{\Gamma_\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk.$$

(3.2.14)

Изучим теперь асимптотику интеграла по контуру Γ_μ в (3.2.14) при $t \to +\infty$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2.3. *Пусть n – нечетное число и $n \geq 3$. Тогда при $\omega \neq \pm\lambda_\mu^{1/2}$*

$$G_{\mu l}^{(2)}(x-\xi,t) = \int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k-i\omega} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} j_{-(\frac{n}{2}-1)}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)dk = 0$$

Доказательство. Известно (см. [49], с.100, 306), что если $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\ell$ различные нули полинома $R_\ell(\theta)$ степени ℓ, то

$$\sigma_\gamma = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\theta_j^\gamma}{R_\ell'(\theta_j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \gamma \leq \ell - 2, \\ a_0^{-1}, & \text{если } \gamma = \ell - 1, \end{cases} \qquad (3.2.15)$$

где a_γ - коэффициент $\theta^{\ell-\gamma}$. Имеет место также рекуррентная формула

$$a_0\sigma_{\ell+h} + a_1\sigma_{\ell+h-1} + a_2\sigma_{\ell+h-2} + \ldots + a_{\ell-1}\sigma_{h+1} + a_\ell\sigma_h = 0,\ h \geq 0 \quad (3.2.16)$$

Из формул (3.2.15), (3.2.16) можно определить значения σ_γ для всех значений γ.

Если в (3.2.16) последовательно полагать $h = 0,1,\ldots,\ell-1$ и учесть (3.2.15), то получим

$$\left.\begin{array}{ll} a_0\sigma_\ell + a_1\sigma_{\ell-1} & = 0 \\ a_0\sigma_{\ell+1} + a_1\sigma_\ell + a_2\sigma_{\ell-1} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0\sigma_{2\ell-2} + a_1\sigma_{2\ell-3} + \ldots + a_{\ell-1}\sigma_{\ell-1} & = 0 \\ a_0\sigma_{2\ell-1} + a_1\sigma_{2\ell-2} + \ldots + a_{\ell-1}\sigma_\ell + a_\ell\sigma_{\ell-1} & = 0 \end{array}\right\} \quad (3.2.17)$$

Так как

$$R_{2N}(\theta) = \theta^{2N} + \lambda_\mu + k^2, \quad (3.2.18)$$

то из (3.2.15), (3.2.17), (3.2.18) при $\ell = 2N$ имеем

$$\begin{array}{l} \sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \ldots, \sigma_{2N-2} = 0, \sigma_{2N-1} = 1, \\ \sigma_{2N} = 0, \sigma_{2N+1} = 0, \ldots, \sigma_{4N-2} = 0, \sigma_{4N-1} = -(\lambda_\mu + k^2) \end{array} \quad (3.2.19)$$

Заменяя в (3.2.16) h последовательно на $2N, 2N+2, \ldots, 4N-1$, получим

$$\left.\begin{array}{ll} a_0\sigma_{4N} + a_1\sigma_{4N-1} + a_2\sigma_{4N-2} + \ldots + a_{2N}\sigma_{2N} & = 0 \\ a_0\sigma_{4N+1} + a_1\sigma_{4N} + a_2\sigma_{4N-1} + \ldots + a_{2N}\sigma_{2N+1} & = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_0\sigma_{6N-1} + a_1\sigma_{6N-2} + a_2\sigma_{6N-3} + \ldots + a_{2N}\sigma_{4N-1} & = 0 \end{array}\right\} (3.2.20)$$

Из (3.2.18)-(3.2.20) следует, что

$$\sigma_{4N}=0,\sigma_{4N+1}=0,...,\sigma_{6N-2}=0,\sigma_{6N-1}=(\lambda_{\mu}+k^2)^2.$$

Продолжая этот процесс, получим, что

$$\sigma_{2\ell N-1}=(-1)^{\ell-1}(\lambda_{\mu}+k^2)^{\ell-1}, \tag{3.2.21}$$

а остальные $\sigma_j=0$ при $j\neq 2\ell N-1$, $\ell=1,2,3,...$.

Справедлива

$$j_{\nu}(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\ell}}{\ell!\Gamma(\nu+\ell+1)}. \tag{3.2.22}$$

Используя разложение (3.2.22), в силу равномерной сходимости ряда, получим

$$G_{\mu l}^{(2)}(x-\xi,t)=\frac{1}{i\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}|x-\xi|^{2\ell-\frac{n}{2}+1}}{2^{2\ell-\frac{n}{2}+1}\ell!\Gamma\left(-\frac{n}{2}+\ell+2\right)}\times$$

$$\times\int_{\Gamma_{\mu}}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,2-2N+2\ell}dk.$$

Из (3.2.21) получаем, что σ_j или равны нулю, или аналитические функции от k. Поэтому

$$G_{\mu l}^{(2)}(x-\xi,t)=0. \tag{3.2.23}$$

Лемма доказана.

Из доказательства леммы 3.2.3 следует следующее утверждение.

Следствие 3.2.1. *При любом* ℓ, $\ell=0,1,2,...;$ $\omega\neq\pm\lambda_{\mu}^{1/2}$

$$\int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{2-2N+2\ell} dk = 0,$$

где $\overline{\eta}_{\nu\mu}$ определены формулой (3.2.6).

Продолжим доказательство теоремы 3.2.1. Из леммы 3.2.3 следует, что при нечетных n

$$G_\mu^{(2)}(x-\xi,t) = G_{\mu I}^{(2)}(x-\xi,t) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k-i\omega} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1} j_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right) dk.$$

Используя разложение $j_{\frac{n}{2}-1}(z)$, получим

$$G_{\mu I}^{(2)}(x-\xi,t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell |x-\xi|^{2\ell+\frac{n}{2}-1}}{2^{2\ell+\frac{n}{2}-1} \ell! \Gamma\left(\frac{n}{2}+\ell\right)} \int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k-i\omega} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{2\ell+n-2N} dk. \quad (3.2.24)$$

Будем изучать асимптотику при $t \to +\infty$ только первого члена ряда (3.2.24), так как вклад от остальных членов ряда при $t \to +\infty$ по сравнению с вкладом от первого члена достаточно мал.

Рассмотрим

$$\Phi_{0\mu}(t) = \int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k-i\omega} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{n-2N} dk. \quad (3.2.25)$$

Используя (3.2.6) и то, что n – нечетное число, получим

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\eta}_{\nu\mu}^{n-2N} = \frac{2}{1-\exp\left(i\frac{\pi}{N}n\right)} \overline{\eta}_{0\mu}^{n-2N} \quad (3.2.26)$$

Если подставить (3.2.26) в (3.2.25), то получим

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N) \int\limits_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} \overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk, \qquad (3.2.27)$$

где

$$C(n,N) = \frac{2}{1 - \exp\left(i \dfrac{\pi}{N} n\right)}. \qquad (3.2.28)$$

Из (3.2.6) выражения $\overline{\eta}_{0\mu}$ следует, что подинтегральная функция в (3.2.27) в точках $k = \pm i\lambda_\mu^{1/2}$ имеет суммируемые особенности. Поэтому интегралы по $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю. Тогда получим

$$\Phi_{0\mu}(t) = \left[1 - \exp\left(-i \frac{\pi}{N} n\right)\right] C(n,N) \int\limits_{\Gamma_\mu^+} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} \overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk. \qquad (3.2.29)$$

Представим

$$\int\limits_{\Gamma_\mu^+} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} \overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk = \left[\int\limits_{-i\lambda_\mu^{1/2}}^{-a-i\lambda_\mu^{1/2}} + \int\limits_{-a-i\lambda_\mu^{1/2}}^{-a+i\lambda_\mu^{1/2}} + \int\limits_{-a+i\lambda_\mu^{1/2}}^{i\lambda_\mu^{1/2}} \right] \frac{\exp(kt)}{k - i\omega} \overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk \equiv$$

$$\equiv \Phi_{0\mu}^{(I)}(t) + \Phi_{0\mu}^{(II)}(t) + \Phi_{0\mu}^{(III)}(t).$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (3.2.30) в отдельности. В $\Phi_{0\mu}^{(I)}(t)$ сделаем замену $k + i\lambda_\mu^{1/2} = -\tau$. Тогда получим

$$\Phi_{0\mu}^{(I)}(t) = \exp(-i\lambda_\mu^{1/2} t) \int\limits_0^a \frac{\exp(-\tau t)}{i\lambda_\mu^{1/2} + i\omega + \tau} \tau^{\frac{n}{2N}-1} \left[-(\tau + 2i\lambda_\mu^{1/2})\right]^{\frac{n}{2N}-1} d\tau.$$

К этому интегралу при $t \to +\infty$ применим теорему 1.1.1. Тогда получим

$$\Phi_{0\mu}^{(I)}(t)=\frac{-i(-2i\lambda_\mu^{1/2})^{\frac{n}{2N}-1}\exp(-i\lambda_\mu^{1/2}t)}{\omega+\lambda_\mu^{1/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right). \quad (3.2.31)$$

$\Phi_{0\mu}^{(II)}(t)$ оценим по модулю

$$\left|\Phi_{0\mu}^{(II)}(t)\right|\leq C\lambda_\mu^{\frac{n}{2N}-\frac{1}{2}}\exp(-at). \quad (3.2.32)$$

Сделав в $\Phi_{0\mu}^{(III)}(t)$ замену $k-i\lambda_\mu^{1/2}=-\tau$, получим

$$\Phi_{0\mu}^{(III)}(t)=\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)\int_0^u\frac{\exp(-\tau t)}{i\lambda_\mu^{1/2}-i\omega-\tau}\tau^{\frac{n}{2N}-1}\left(2i\lambda_\mu^{1/2}-\tau\right)^{\frac{n}{2N}-1}d\tau.$$

Применяя к этому интегралу теорему 1.1.1. при $t\to+\infty$, получим

$$\Phi_{0\mu}^{(III)}(t)=\frac{i(2i\lambda_\mu^{1/2})^{\frac{n}{2N}-1}}{\omega-\lambda_\mu^{1/2}}\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right). \quad (3.2.33)$$

Из (3.2.29)-(3.2.33) следует, что при $t\to+\infty$ для $\Phi_{0\mu}(t)$ имеет место следующая асимптотика

$$\Phi_{0\mu}(t)=i\left[1-\exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]C(n,N)\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)\times$$

$$\times\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right), \quad (3.2.34)$$

где

$$\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)=(2i\lambda_\mu^{1/2})^{\frac{n}{2N}-1}\left[\frac{\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)}{\omega-\lambda_\mu^{1/2}}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2N}}\exp(-i\lambda_\mu^{1/2}t)}{\omega+\lambda_\mu^{1/2}}\right] \quad (3.2.35)$$

Из (3.2.24), (3.2.25), (3.2.34) следует, что при $t \to +\infty$

$$G_{\mu}^{(2)}(x-\xi,t)=\frac{i|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[1-\exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]\times$$

$$\times C(n,N)\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)\Psi(t,\lambda_{\mu},\omega)t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right) \qquad (3.2.36)$$

равномерно по $x-\xi$ в каждом компакте, где $\Psi(t,\lambda_{\mu},\omega)$ определяется формулой (3.2.35).

Пусть теперь n – четное число. Используя разложение $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ для целых порядков (см.[29], с.177), получим

$$G_{\mu}^{(2)}(x-\xi,t)=\int_{\Gamma_{\mu}}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\times$$

$$\times\left\{j_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)+\frac{i}{\pi}\left[2j_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)\ln\frac{|x-\xi|}{2}\overline{\eta}_{\nu\mu}-\right.\right.$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{\left(\frac{n}{2}-\ell-2\right)!}{\ell!}\left(\frac{|x-\xi|}{2}\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)^{2\ell-\frac{n}{2}+1}-$$

$$\left.\left.-\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)^{\frac{n}{2}+2\ell-1}}{\ell!\left(\frac{n}{2}-1+\ell\right)!}\left(\Psi\left(\frac{n}{2}+\ell\right)+\Psi\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right]\right\}, \qquad (3.2.37)$$

где $\Psi(\ell)=-\gamma+\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{j}$, $\gamma=0{,}5772$ - постоянная Эйлера. Учитывая следствие леммы 3.2.3 и то, что в первую, третью и четвертую сумму в (3.2.37) входят $\overline{\eta}_{\nu\mu}$ только в четной степени, получаем, что интеграл от этих слагаемых равен нулю. Поэтому

$$G_{\mu}^{(2)}(x-\xi,t)=\frac{2i}{\pi}\int_{\Gamma_\mu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\times$$

$$\times j_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}\right)\ln\frac{|x-\xi|}{2}\overline{\eta}_{\nu\mu}dk. \qquad (3.2.38)$$

Ограничимся первым членом разложения в ряд $j_{\frac{n}{2}-1}(z)$, так как вклад от остальных членов разложения при $t\to+\infty$ будет мал по сравнению с вкладом первого члена разложения. Обозначим первый член разложения в (3.2.38) через $G_{0\mu}^{(2)}(x-\xi,t)$

$$G_{0\mu}^{(2)}(x-\xi,t)=\frac{2i}{\pi\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{|x-\xi|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\times$$

$$\times\int_{\Gamma_\mu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}\ln\overline{\eta}_{\nu\mu}dk. \qquad (3.2.39)$$

Учитывая, что

$$\ln\overline{\eta}_{\nu\mu}=\ln\overline{\eta}_{0\mu}+i\frac{\pi}{N}\nu$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}\ln\overline{\eta}_{\nu\mu}=\ln\overline{\eta}_{0\mu}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}+i\frac{\pi}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\nu\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}. \qquad (3.2.40)$$

Из (3.2.6) имеем

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}=\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{\pi}{N}\nu\right)=C_0(n,N)\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N},\qquad(3.2.41)$$

где

$$C_0(n,N)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{\pi n}{N}\nu\right)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ n-\textit{четное},\ n\neq 2N\ell,\\ N,\ \textit{если}\ n=2N\ell,\ \ell=1,2,3,...\end{cases}$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{N-1}\nu\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\,n-2N}=\frac{1}{N}\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\nu\exp\left(i\frac{\pi n}{N}\nu\right)=C_1(n,N)\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N},\qquad(3.2.42)$$

$$C_1(n,N)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\nu\exp\left(i\frac{\pi n}{N}\nu\right)=\begin{cases}0,\qquad \textit{если}\ n-\textit{четное},\ n\neq 2N\ell,\\ \dfrac{N-1}{2},\ \textit{если}\ n=2N\ell,\ \ell=1,2,3,...\end{cases}$$

Таким образом, из формул (3.2.40)-(3.2.42) следует, что при четных n, $n\neq 2N\ell$ подинтегральное выражение в (3.2.39) в точках $k=\pm i\lambda_\mu^{1/2}$ имеет особенность вида $\left(k\pm i\lambda_\mu^{1/2}\right)^{\frac{n}{2N}-1}$, а при $n=2N\ell$ – особенности вида $\ln\left(k\pm i\lambda_\mu^{1/2}\right)$. Поэтому при $t\to+\infty$ исследуем следующие интегралы

$$\begin{gathered}Q_\mu^{(I)}(t)=\int_{\Gamma_\mu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\left[-(\lambda_\mu+k^2)\right]^{\ell-1}\ln\overline{\eta}_{0\mu}dk,\\ Q_\mu^{(II)}(t)=\int_{\Gamma_\mu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N}dk.\end{gathered}\qquad(3.2.43)$$

Так как подинтегральные функции в (3.2.43) имеют суммируемые особенности в точках $k=\pm i\lambda_\mu^{1/2}$, то при $\varepsilon\to 0$ интегралы по контурам $C_\varepsilon^{(1)}$ и $C_\varepsilon^{(2)}$ стремятся к нулю. После обхода точки $k=i\lambda_\mu^{1/2}$ получим

$$Q_{\mu}^{(I)}(t) = 2\pi i \int\limits_{\Gamma_{\mu}^{+}} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega}\left[-(\lambda_{\mu} + k^2)\right]^{\ell-1} dk, \qquad \ell = \frac{n}{2N},$$

$$Q_{\mu}^{(II)}(t) = \left(1 - \exp\left(-i\frac{\pi n}{N}\right)\right)\int\limits_{\Gamma_{\mu}^{+}} \frac{\exp(kt)}{k - i\omega}\overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk, \quad \ell \neq \frac{n}{2N}.$$

Поступая как выше при оценке интеграла в (3.2.30) при $t \to +\infty$, будем иметь

$$Q_{\mu}^{(I)}(t) = -2\pi \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2N}\right)}{t^{\frac{n}{2N}}}\Psi(t, \lambda_{\mu}, \omega) + O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right),$$

$$Q_{\mu}^{(II)}(t) = \left(1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right)\frac{i\Gamma\left(\dfrac{n}{2N}\right)}{t^{\frac{n}{2N}}}\Psi(t, \lambda_{\mu}, \omega) + O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right), \tag{3.2.44}$$

где $\Psi(t, \lambda_{\mu}, \omega)$ определяется формулой (3.2.35).

Из (3.2.39)-(3.2.43) получаем

$$G_{0\mu}^{(2)}(x - \xi, t) = \frac{2i}{\pi\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{|x - \xi|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times \left[C_0(n, N)Q_{\mu}^{(I)}(t) + i\pi C_1(n, N)Q_{\mu}^{(II)}(t)\right] \tag{3.2.45}$$

Подставляя (3.2.44) в (3.2.45), получим, что при $t \to +\infty$

$$G_{0\mu}^{(2)}(x - \xi, t) = -2\frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2N}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\frac{|x - \xi|}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \times$$

$$\times \left[2iC_0(n, N) + \left(1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right)C_1(n, N)\right] \times$$

$$\times \Psi(t,\lambda_\mu,\omega) t^{-\frac{n}{2N}} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right) \qquad (3.2.46)$$

равномерно по $x-\xi$ в каждом компакте из R_n, где $\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)$, $C_0(n,N)$, $C_1(n,N)$ определяются формулами (3.2.35), (3.2.41), (3.2.42) соответственно.

Из этой теоремы следует следующая теорема.

Теорема 3.2.2. *Если* $\omega \neq \pm\lambda_\mu^{1/2}$, $\mu = 1,2,3,...$; $f(x,y)$ *- финитная бесконечно дифференцируемая функция, то для задачи (3.2.1)-(3.2.3) имеет место принцип предельной амплитуды, т.е. при* $t \to +\infty$

$$\exp(-i\omega t)u(t,x,y) = \overline{\vartheta}(\omega,x,y) + \frac{(2\pi)^{-(\frac{n}{2}+1)}}{4N}\exp(-i\omega t)A(n,N)\times$$

$$\times\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)f_\mu\varphi_\mu(y)\right)t^{-\frac{n}{2N}} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right)$$

равномерно по (x,y) в каждом компакте из $Ц$, где $\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$ - решение задачи (3.1.1)-(3.1.2) при $k=\omega$, выделенное принципом предельного поглощения, ряд сходится равномерно по $y\in\Omega$, $\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)$ определена формулой (3.2.35), а $A(n,N)$ формулой (3.2.49). При $n>2N$ допускается также $\omega = \pm\lambda_\mu^{1/2}$.

Доказательство. Подставим выражение $G_\mu(x-\xi,t)$ из теоремы 3.2.1 в (3.2.7), тогда получим

$$u(t,x,y)\exp(-i\omega t) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}-1}}{4N}\times$$

$$\times\left\{2\pi i\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\int_{R_n}\sum_{\nu=0}^{N-1}\overline{\eta}_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}(\lambda_\mu,i\omega)H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\overline{\eta}_{\nu\mu}(\lambda_\mu,i\omega)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left|x-\xi\right|^{1-\frac{n}{2}} f_\mu(\xi)d\xi\Bigg]\varphi_\mu(y)+\exp(-i\omega t)\times$$

$$\times\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\iint_{R_n}\left|x-\xi\right|^{1-\frac{n}{2}} G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)f_\mu(\xi)d\xi\right]\varphi_\mu(y)\Bigg\}. \qquad (3.2.47)$$

Рассмотрим теперь поведение при $t\to+\infty$ следующих интегралов

$$F_\mu(x,t)=\iint_{R_n}\left|x-\xi\right|^{1-\frac{n}{2}} G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)f_\mu(\xi)d\xi, \quad \mu=1,2,3,...$$

Используя асимптотику $G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)$ из (3.2.36) при нечетных n и из (3.2.46) при четных n, для F_μ получим следующую асимптотику

$$F_\mu(x,t)=A(n,N)\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)f_\mu t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right), \qquad (3.2.48)$$

равномерно по x в каждом компакте из R_n, где

$$A(n,N)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)}{2^{\frac{n}{2}-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{i}{2}C(n,N)\left[1-\exp\left(-i\dfrac{\pi}{N}n\right)\right], & \text{при } n-\text{нечетных},\\ 2C_0(n,N)+\left[1-\exp\left(-i\dfrac{\pi}{N}n\right)\right]C_1(n,N), & \text{при } n-\text{четных}.\end{cases}$$

(3.2.49)

По формуле (3.2.6) первая сумма $\overline{\vartheta}(\omega,x,y)$ в (3.2.47) представляет решение стационарной задачи (3.1.1)-(3.1.2) при $k=\omega$. Подставив выражение $F_\mu(x,t)$ из (3.2.48) в (3.2.47) для решения задачи (3.2.1)-(3.2.3), получим при $t\to+\infty$ следующую асимптотику

$$\exp(-i\omega t)u(t,x,y)=\overline{\vartheta}(\omega,x,y)+\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}-1}}{4N}\exp(-i\omega t)A(n,N)\times$$
$$\times\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\Psi(t,\lambda_\mu,\omega)f_\mu\varphi_\mu(y)\right]+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right), \qquad (3.2.50)$$

равномерно по (x,y) в каждом компакте из $Ц$, где ряд сходится равномерно по $y\in\Omega$.

Пусть теперь $n>2N$ и $\omega=\lambda_{\mu_0}^{1/2}$. Тогда в (3.2.24) и (3.2.38) все степени $\overline{\eta}_{\nu\mu}$ положительны. Найдем при $t\to+\infty$ асимптотику $\Phi_{0\mu_0}(t)$ из (3.2.27) и $Q_{\mu_0}^{(I)}(t)$, $Q_{\mu_0}^{(II)}(t)$ из (3.2.43). Рассмотрим случай нечетных n. В этом случае $\Phi_{0\mu_0}^{(I)}(t)$ в (3.2.30) будет иметь вид

$$\Phi_{0\mu_0}^{(I)}(t)=-\exp(-i\lambda_{\mu_0}^{1/2}t)\int_0^a\exp(-\tau t)\tau^{\frac{n}{2N}-1}\left[-(\tau+2i\lambda_{\mu_0}^{1/2})\right]^{\frac{n}{2N}-2}d\tau. \qquad (3.2.51)$$

Применяя к (3.2.51) теорему 1.1.1 при $t\to+\infty$ получим

$$\Phi_{0\mu_0}^{(I)}(t)=-(-2i\lambda_{\mu_0}^{1/2})^{\frac{n}{2N}-2}\exp(-i\lambda_{\mu_0}^{1/2}t)\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)t^{-\frac{n}{2N}}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}-1}\right). \qquad (3.2.52)$$

Аналогичным образом для $\Phi_{0\mu_0}^{(III)}(t)$ получим

$$\Phi_{0\mu_0}^{(III)}(t)=-\exp(i\lambda_{\mu_0}^{1/2}t)\int_0^a\exp(-\tau t)\tau^{\frac{n}{2N}-1}\left(2i\lambda_{\mu_0}^{1/2}-\tau\right)^{\frac{n}{2N}-1}d\tau \qquad (3.2.53)$$

Применяя к (3.2.53) теорему 1.1.1, при $t\to+\infty$ получим

$$\Phi^{(III)}_{0\mu_0}(t) = -(2i\lambda^{1/2}_{\mu_0})^{\frac{n}{2N}-1} \exp(i\lambda^{1/2}_{\mu_0} t)\Gamma\left(\frac{n}{2N}-1\right)t^{-\frac{n}{2N}+1} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}}\right). \tag{3.2.54}$$

Из (3.2.29), (3.2.30), (3.2.32), (3.2.52), (3.2.54) получим, что при $t \to +\infty$

$$\Phi_{0\mu_0}(t) = -\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]C(n,N)(2i\lambda^{1/2}_{\mu_0})^{\frac{n}{2N}-1} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n}{2N}-1\right)t^{-\frac{n}{2N}+1} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}}\right). \tag{3.2.55}$$

Из (3.2.24), (3.2.25), (3.2.55) при $t \to +\infty$ получаем

$$G^{(2)}_{\mu_0}(x-\xi,t) = -\frac{|x-\xi|^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]C(n,N)(2i\lambda^{1/2}_{\mu_0})^{\frac{n}{2N}-1} \times$$

$$\times \exp(i\lambda^{1/2}_{\mu_0} t)\Gamma\left(\frac{n}{2N}-1\right)t^{-\frac{n}{2N}+1} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}}\right) \tag{3.2.56}$$

равномерно по $x-\xi$ в каждом компакте.

Для четных n при $t \to +\infty$ также получаем следующую асимптотику

$$G^{(2)}_{0\mu_0}(x-\xi,t) = i|x-\xi|^{-1+\frac{n}{2}} \exp(i\lambda^{1/2}_{\mu_0} t)(2i\lambda^{1/2}_{\mu_0})^{\frac{n}{2N}-1} \times$$

$$\times A_1(n,N)t^{-\frac{n}{2N}+1} + O\left(t^{-\frac{n}{2N}}\right), \tag{3.2.57}$$

где

$$A_1(n,N)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2^{\frac{n}{2}-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[2C_0(n,N)+\left(1-\exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right)C_1(n,N)\right].$$

Для $G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)$ при $\mu\neq\mu_0$ и $t\to+\infty$ получаем (3.2.36), если n – нечетное или (3.2.46), если n – четное. Из сказанного и из (3.2.47), (3.2.57) при $t\to+\infty$ получаем

$$\exp(-i\lambda_{\mu_0}^{1/2}t)u(t,x,y)=\overline{\vartheta}(\omega,x,y)+\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}}{4N}A_1(n,N)(2i\lambda_{\mu_0}^{1/2})^{\frac{n}{2N}-1}\times$$
$$\times f_{\mu_0}\varphi_{\mu_0}(y)t^{-\frac{n}{2N}+1}+O\left(t^{-\frac{n}{2N}}\right) \qquad (3.2.58)$$

равномерно по (x,y) в каждом компакте из $Ц$.

Теорема 3.2.2 доказана.

Замечание. Ряд в (3.2.50) сходится равномерно по $y\in\Omega$ и $t\in[0,\infty)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 1.3.1, поэтому приведем его вкратце. Так как $f(y)\in C_0^\infty(Ц)$, то $f(y)\in D(\widetilde{L}^\nu)$, где ν - натуральное число. Тогда по теореме Рисса

$$\widetilde{L}^\nu f=\sum_{\mu=1}^{\infty}\alpha_\mu\varphi_\mu(y),\qquad \sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\alpha_\mu\right|^2=\left\|L^\nu f\right\|_{l_2(\Omega)}.$$

Так как

$$\alpha_\mu=(\widetilde{L}^\nu f,\varphi_\mu)=(f,\widetilde{L}^\nu\varphi_\mu)=(f,\lambda_\mu^\nu\varphi_\mu)=\lambda_\mu^\nu f_\mu,$$

то

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\lambda_\mu^{2\nu}\left|f_\mu\right|^2=\left\|\widetilde{L}^\nu f\right\|_{l_2(\Omega)}^2\le C\left\|f\right\|_{H^{2\nu}(\Omega)}^2. \qquad (3.2.58^*)$$

Так же, как в доказательстве леммы 1.3.1, с помощью теоремы вложения С.Л.Соболева можно показать, что

$$\left\|\varphi_{\mu}(y)\right\|_{C(\Omega)} \leq C\left\|\varphi_{\mu}(y)\right\|_{H^{[\frac{m}{2}]+1}(\Omega)} \leq C_1 \lambda_{\mu}^{\frac{1}{2N}([\frac{m}{2}]+1)}.$$

Из теории краевых задач для эллиптических уравнений в ограниченной области с достаточно гладкой границей известно, что при $\mu \to +\infty$

$$\lambda_{\mu} \approx C_m(\Omega)\mu^{\frac{2N}{m}}.$$

Тогда, используя (3.2.35) и оценку нормы $\varphi_{\mu}(y)$, получим

$$\left\|\sum_{\mu=1}^{\infty} \Psi(t, \lambda_{\mu}, \omega) f_{\mu} \varphi_{\mu}(y)\right\|_{C(\Omega)} \leq C \sum_{\mu=1}^{\infty} \lambda_{\mu}^{\frac{n}{4N}+\frac{1}{2N}([\frac{m}{2}]+1)-1} \left|f_{\mu}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \lambda_{\mu}^{-m} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \lambda_{\mu}^{\frac{n}{2N}+\frac{1}{N}([\frac{m}{2}]+1)+m-2} \left|f_{\mu}\right|^2;$$

Полагая в (3.2.58*) $\nu = \left[\frac{n}{4N} + \frac{1}{2N}\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right) + \frac{m}{2} - 1\right]$ и учитывая, что $N \geq 1$, из асимптотики λ_{μ} получаем, что последние ряды сходятся. Замечание к теореме 3.2.2 доказано.

Рассмотрим теперь резонансный случай, т.е. $\omega = \pm\lambda_{\mu}^{1/2}$. В этом случае, как показано в теореме 3.2.2, при $n > 2N$, $t \to +\infty$ для задачи (3.2.1)-(3.2.3) имеет место принцип предельной амплитуды, а в случае $n \leq 2N$ решение нестационарной задачи (3.2.1)-(3.2.3) при $t \to +\infty$ растет, что следует из следующей теоремы.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $n \leq 2N$, $\omega = \pm\lambda_{\mu}^{1/2}$. *Тогда для задачи (3.2.1)-(3.2.3) принцип предельной амплитуды не* *имеет места и при $t \to +\infty$ для решения этой задачи справедлива следующая асимптотика*

$$\exp(-i\omega t)u(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}+1} N} \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{1}{4} A(n,N,\mu) f_\mu \varphi_\mu(y) t^{1-\frac{n}{2N}} + O(1), \text{ если } n - \text{нечетное}, \\ -\dfrac{f_\mu \varphi_\mu(y) \ln t}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} + O(1), \qquad \text{если } n = 2N, \\ \dfrac{1}{4} B(n,N,\mu) f_\mu \varphi_\mu(y) t^{1-\frac{n}{2N}} + O(1), \text{ если } n - \text{четное}. \end{cases}$$

равномерно по x в каждом компакте из R_n, где $A(n,N,\mu)$ и $B(n,N,\mu)$ определяются формулами (3.2.65) и (3.2.71) соответственно.

Доказательство. Пусть $\omega = \lambda_\mu^{1/2}$, n – нечетное число. Учитывая доказательство теоремы 3.2.1, получим, что для исследования асимптотики $G_\mu(x-\xi,t)$ при $t \to +\infty$ достаточно исследовать асимптотику $G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)$. Основной вклад в асимптотику $G_\mu^{(2)}(x-\xi,t)$ в силу леммы 3.2.1 при $t \to +\infty$ вносит первое слагаемое. В силу (3.2.27)

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N) \int_{\Gamma_\mu} \frac{\exp(kt)}{k - i\lambda_\mu^{1/2}} \overline{\eta}_{0\mu}^{\,n-2N} dk,$$

где $C(n,N)$ определена формулой (3.2.28). Из (3.2.6) при $\nu = 0$ получаем

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N)\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)\left\{\int_{\Gamma_\mu}\frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]_0^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\exp(k - i\lambda_\mu^{1/2})t - 1\right]dk + \int_{\Gamma_\mu}\frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]_0^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}}dk\right\},$$

где нуль у скобки означает нулевую ветвь функции, которую мы в дальнейшем опускаем. Учитывая, что при больших $|k|$

$$\left|\frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}}\right| \le \frac{c}{|k|^{3-\frac{n}{N}}},$$

используя теорему Коши, получаем, что

$$\int_{\Gamma_\mu}\frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}}dk = 0.$$

отсюда имеем

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N)\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)\int_{\Gamma_\mu}\frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}}\left[\exp(k - i\lambda_\mu^{1/2})t - 1\right]dk.$$

Учитывая обход вокруг точки ветвления $k = i\lambda_\mu^{1/2}$, получим

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N)\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t)\times$$

$$\times \int_{\Gamma_\mu^+} \frac{\left[-(\lambda_\mu + k^2)\right]^{\frac{n}{2N}-1}}{k - i\lambda_\mu^{1/2}} \left[\exp(k - i\lambda_\mu^{1/2})t - 1\right] dk. \quad (3.2.59)$$

Представим $\Phi_{0\mu}(t)$ в виде

$$\Phi_{0\mu}(t) = C(n,N)\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t) \times$$

$$\times \left[\int_{-i\lambda_\mu^{1/2}}^{-a+i\lambda_\mu^{1/2}} + \int_{-a+i\lambda_\mu^{1/2}}^{i\lambda_\mu^{1/2}}\right](k - i\lambda_\mu^{1/2})^{\frac{n}{2N}-2}\left[-(k + i\lambda_\mu^{1/2})\right]^{\frac{n}{2N}-1} \times$$

$$\times \left[\exp(k - i\lambda_\mu^{1/2})t - 1\right] dk \equiv \Phi_{0\mu}^{(I)}(t) + \Phi_{0\mu}^{(II)}(t). \quad (3.2.60)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (3.2.60) в отдельности. Оценив $\Phi_{0\mu}^{(I)}(t)$ по модулю, а в $\Phi_{0\mu}^{(II)}(t)$ сделав замену $k - i\lambda_\mu^{1/2} = -\tau$ и применив лемму 3.2.2, при $\beta = 0$, $t \to +\infty$ получим

$$\left|\Phi_{0\mu}^{(I)}(t)\right| \le \widetilde{C}(n,N)\lambda_\mu^{\frac{n}{2N}-\frac{1}{2}}, \quad (3.2.61)$$

$$\Phi_{0\mu}^{(II)}(t) = C(n,N)\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t) \times$$

$$\times (-1)^{\frac{n}{N}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2N}\right)}{\frac{n}{2N} - 1}(2i\lambda_\mu^{1/2})^{\frac{n}{2N}-1} t^{-\frac{n}{2N}+1} + O(1), \quad (3.2.62)$$

где $\widetilde{C}(n,N)$ - некоторая постоянная, зависящая от n, N.

Из (3.2.60)-(3.2.62) следует, что при $t \to +\infty$ для $\Phi_{0\mu}(t)$ имеет место следующая асимптотика

$$\Phi_{0\mu}(t) = (-1)^{\frac{n}{N}-1} C(n,N)\left[1 - \exp\left(-i\frac{\pi}{N}n\right)\right]\exp(i\lambda_\mu^{1/2}t) \times$$

носителем и $u(x) = \vartheta(x) * \xi(x)$. *Тогда если* $|\vartheta(x)| \le Cr^{-\alpha}$ *при* $r \to \infty$, *то такую же оценку имеет* $u(x)$. *Если функция* $\vartheta(x)$ *обладает оценками (3.3.2) или (3.3.3), то такие же оценки справедливы для* $u(x)$.

Замечание. Если $\vartheta(x) < C\exp(-|x|)$ при $r \to \infty$ и $\xi(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция в R_n с компактным носителем, то утверждения леммы 3.3.1 остаются в силе, только степенное убывание при $r \to \infty$ всюду надо заменять на экспоненциальное убывание.

Доказательство теоремы 3.3.1. Пусть $Ц_\rho = \Omega \times \sigma_\rho(x)$, где $\sigma_\rho(x)$ есть шар радиуса ρ с центром в начале координат в $R_n(x)$,

$$\partial Ц_\rho = \partial\Omega \times \sigma_\rho(x) \bigcup \Omega \times \partial\sigma_\rho(x) \qquad (3.3.4)$$

Фиксируем точку x и применим формулу Грина к функциям $u(k, x^0, y)$ и $G(k, x^0, \xi, y, z)$, где $x^0 \in \sigma_\rho(x)$

$$\int_{Ц_\rho} \left[\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + k^2\right)u\right] \overline{G(k, x^0, \xi, y, z)} dЦ_\rho = \int_{Ц_\rho} u(k, \xi, z) \times$$
$$\times \overline{\left(P^*\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + k^2\right) G(k, x^0, \xi, y, z)} dЦ_\rho + \int_{\partial Ц_\rho} M\left[u, \overline{G}\right] ds, \qquad (3.3.5)$$

где $M[u,G]$ является билинейным дифференциальным выражением, содержащим производные u и G до порядка $2N-1$. Суммарный порядок производных от u и G, встречающихся в каждом члене $M[u,G]$, не превосходит $2N-1$. Точнее,

$$M[u,G] = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le 2N-1} f_{\alpha,\beta}(s_1) D^\alpha u(k, \xi, z) D^\beta G(k, x^0, \xi, y, z), \quad s_1 = \frac{\xi}{|\xi|},$$

где $f_{\alpha\beta}(s_1)$ - бесконечно дифференцируемые функции, определенные на единичной сфере. Учитывая, что

$$P^*\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial z}\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial z}\right)+k^2\right)G(k,x,\xi,y,z)=\delta(x-\xi,y,z),$$

и

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial z}\right)+k^2\right)u(k,\xi,z)=0,$$

из (3.3.5) получим

$$u(k,x^0,y)=\int\limits_{\partial\Pi_\rho}M\left[u,\overline{G}\right]ds. \tag{3.3.6}$$

Учитывая граничные условия (3.1.2) из (3.3.4), (3.3.6), получаем

$$u(k,x^0,y)=\int\limits_{\Omega\times\partial\sigma_\rho}M\left[u,\overline{G}\right]ds.$$

Рассмотрим разложение решения задачи $(3.1.1)_0$-(3.1.2) по системе функций $\varphi_\mu(y)$

$$u(k,x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}u_\mu(k,x)\varphi_\mu(y). \tag{3.3.7}$$

Обозначим

$$W_{\mu\nu}(k,x)=-\frac{i}{4N(2\pi)^{\frac{n}{2}}}|x|^{1-\frac{n}{2}}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right),$$

$$W_\mu(k,x)=\sum_{\nu=0}^{N-1}W_{\mu\nu}(k,x).$$

Используя разложение (3.3.7), будем иметь

$$u_\mu(k,x^0) = \int_{\partial\sigma_\rho} M[u_\mu, W_\mu] ds_\rho. \qquad (3.3.8)$$

Теперь рассмотрим интегралы

$$\int_{\partial\sigma_\rho} M[u_\mu, W_{\mu\nu}] ds_\rho =$$

$$= \int_{\partial\sigma_\rho} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2N-1} f_{\alpha,\beta}(s_1) D^\alpha u_\mu D^\beta W_{\mu\nu} ds_\rho, \; \nu = 0,1,\ldots,N-1. \quad (3.3.9)$$

Можно показать, что

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\mu(k,x) = \left(P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + k^2 - \lambda_\mu\right) u_\mu(k,x) = 0. \quad (3.3.10)$$

Действительно, используя формулу Грина и граничные условия (3.1.2), получим

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\mu(k,x) = \int_\Omega P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(k,x,y)\varphi_\mu(y) d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega \left[k^2 + P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right] u(k,x,y)\varphi_\mu(y) d\Omega = -\int_\Omega u(k,x,y) P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_\mu(y) d\Omega -$$

$$-k^2 \int_\Omega u(k,x,y)\varphi_\mu(y) d\Omega = \left(\lambda_\mu - k^2\right) u_\mu(k,x). \quad (3.3.10)$$

так как $-P_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_\mu(y) = \lambda_\mu \varphi_\mu(y)$. Отсюда и из (3.3.11) следует (3.3.10).

Покажем, что $u_\mu(k,x) = 0$ для всех μ. Пусть $\mu > \ell$, где число ℓ определяется из условия $\lambda_\mu \le k^2$. Совершая преобразование Фурье по x в (3.3.10) (считая $u(k,x)$ обобщенной функцией над C_0^∞), получим

$$\left(P_0(i\xi) + k^2 - \lambda_\mu\right) \hat{u}(k,\xi) = 0.$$

Так как $P_0(i\xi)$ - отрицательно определенный полином и $\lambda_\mu > k^2$ при $\mu > \ell$, то отсюда получим, что $\hat{u}(k,\xi) = 0$. Совершая обратное преобразование Фурье, получим

$$u_\mu(k,x) = 0 \quad \textit{при} \;\; \mu > \ell. \qquad (3.3.12)$$

Если $k^2 = \lambda_\ell$, то из (3.3.10) следует

$$P_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\ell(k,x) = 0.$$

Отсюда получаем, что $u_\ell(k,x)$ есть многочлен по x степени $2N-1$. Из условия (3.3.2) следует, что

$$u_\ell(k,x) = 0. \qquad (3.3.13)$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.3.10) при $\mu < \ell$. Покажем, что для решений однородного уравнения (3.3.10) справедливо представление (см.[34], с.161)

$$u_\mu(k,x) = u_\mu(k,x) * h(x), \qquad (3.3.14)$$

где

$$h(x) \equiv Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[1 - g(x)]\varepsilon(x) \in C_0^\infty(R_n),\; g(x) \in C_0^\infty(R_n),\; g(x) \equiv 1$$

в некоторой окрестности начала координат, $\varepsilon(x)$ – какое-нибудь фундаментальное решение оператора $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Так как gε имеет компактный носитель, то

$$u_\mu * Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g\varepsilon = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\mu * g\varepsilon = 0,$$

$$u_\mu * Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varepsilon = u_\mu * \delta = u_\mu .$$

Из последних двух равенств получаем

$$u_\mu = u_\mu * Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[1 - g(x)]\varepsilon(x) = u_\mu * h.$$

Так как $h(x)$ имеет компактный носитель, то

$$D^p u_\mu(k,x) = u_\mu(k,x) * D^p h(x),$$

поэтому из леммы 3.3.1 и условий (3.3.2), (3.3.3) следует, что этим условиям при $r \to \infty$ удовлетворяет любая производная $u_\mu(k,x)$. Так как функции $W_{\mu\nu}(k,x)$ являются фундаментальными решениями эллиптического уравнения (3.3.10), удовлетворяющие на бесконечности условиям (3.3.2), (3.3.3), то такие же оценки, в силу сказанного, справедливы и для производных любого порядка функций $W_{\mu\nu}(k,x)$. Отметим, что удовлетворение условий (3.3.2), (3.3.3) для функций $W_{\mu\nu}(k,x)$ и для их производных любого порядка можно также получить из асимптотики при $z \to \infty$ функции $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(z)$ и формулы дифференцирования этой функции.

Для доказательства теоремы нужно показать, что

$$\lim_{\rho\to\infty} \theta_{\mu\nu}(x^0,k) = \lim_{\rho\to\infty} \int_{\partial\sigma_\rho} f_{\alpha\beta}(s_1) D^\alpha u_\mu(k,\xi) D^\beta W_{\nu\mu}(x^0,\xi)\, ds_\rho = 0;$$

$$\nu = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (3.3.15)$$

Рассмотрим сперва $\theta_{\mu\nu}(x^0,k)$ при $\nu=1,2,...,N-1$. В силу определения $\eta_{\nu\mu}$, функции $W_{\mu\nu}$ и их производные любого порядка экспоненциально убывает при $\rho\to\infty$. Поэтому из (3.3.2) и сказанного получаем

$$\left|\int\limits_{\partial\sigma_\rho} f_{\alpha\beta}(s_1)D^\alpha u_\mu(k,\xi)D^\beta W_{\nu\mu}(k,x^0,\xi)ds_\rho\right|\le C\exp\left(-\rho Jm\eta_{\nu\mu}\right).$$

Отсюда при $\rho\to+\infty$ получаем

$$\theta_{\mu\nu}(x^0,k)=0,\quad \nu=1,2,...,N-1. \qquad (3.3.16)$$

Рассмотрим теперь случай $\nu=0$.

$$\theta_{\mu 0}(x^0,k)=\int\limits_{\partial\sigma_\rho} f_{\alpha\beta}(s_1)D^\alpha u_\mu(k,\xi)D^\beta W_{\mu 0}(k,x^0,\xi)ds_\rho=$$

$$=\rho^{n-1}\int\limits_{\partial\sigma_\rho} f_{\alpha\beta}(s_1)u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)ds_1,$$

где $u_{\mu\alpha}=D^\alpha u_\mu$, $W_{\mu 0\beta}=D^\beta W_{\mu 0}$, ds_1 - элемент поверхности единичной сферы $\partial\sigma_1(x)$. Рассмотрим среднее значение $\theta_{\mu 0}(x^0,k)$

$$\theta_{\mu 0}(x^0,k)=\frac{1}{R}\int\limits_R^{2R}d\rho\,\rho^{n-1}\int\limits_{\partial\sigma_1} f_{\alpha\beta}(s_1)u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)ds_1.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\theta_{\mu 0}(x^0,k)=\int\limits_{\partial\sigma_1} f_{\alpha\beta}(s_1)ds_1\times$$

$$\times\left[\frac{1}{R}\int\limits_R^{2R}\rho^{n-1}u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)d\rho\right]. \qquad (3.3.17)$$

Используя (3.3.3), имеем

$$u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{i\eta_{0\mu}}\frac{\partial u_{\mu\alpha}}{\partial\rho}+C\rho^{-\frac{n}{2}}\right)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{i\eta_{0\mu}}\frac{\partial}{\partial\rho}W_{\mu 0\beta}+C\rho^{-\frac{n}{2}}\right)u_{\mu\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{i\eta_{0\mu}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\right]+$$

$$+C\rho^{-\frac{n}{2}}\left[u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\right] \qquad (3.3.18)$$

Подставим (3.3.18) в (3.3.17) и интегрируя по ρ по частям, получим

$$\theta_{\mu 0}(x^0,k)=\int_{\partial\sigma_1}\frac{1}{R}f_{\alpha\beta}(s_1)\frac{1}{2i\eta_{0\mu}}\left[\rho^{n-1}u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\Big|_R^{2R}-\right.$$

$$\left.-(n-1)\int_R^{2R}u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\rho^{n-2}d\rho\right]ds_1+C\int_{\partial\sigma_1}\frac{f_{\alpha\beta}(s_1)}{R}\times$$

$$\times\int_R^{2R}\rho^{\frac{n}{2}-1}\left[u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)+W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\right]d\rho ds_1=\int_{\partial\sigma_1}f_{\alpha\beta}(s_1)\frac{1}{2i\eta_{0\mu}}\frac{1}{R}\times$$

$$\times\left\{\left[(2R)^{n-1}u_{\mu\alpha}(k,2Rs_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,2Rs_1)-\right.\right.$$

$$\left.-R^{n-1}u_{\mu\alpha}(k,Rs_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,Rs_1)\right]-(n-1)\times$$

$$\left.\times\int_R^{2R}u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\rho^{n-2}d\rho\right\}ds_1+C\int_{\partial\sigma_1}\frac{f_{\alpha\beta}(s_1)}{R}ds_1\times$$

$$\times\int_R^{2R}\rho^{\frac{n}{2}-1}\left[u_{\mu\alpha}(k,\rho s_1)+W_{\mu 0\beta}(k,x^0,\rho s_1)\right]d\rho=C\left(R^{-\frac{3}{2}}+R^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда при $R\to\infty$, получаем, что

$$\theta_{\mu 0}(x^0,k)=0. \qquad (3.3.19)$$

Из (3.3.16) и (3.3.19) получаем, что

$$\theta_{\mu\nu}(x^0,k)=0 \quad при \quad \nu=0,1,...,N-1. \qquad (3.3.20)$$

Из (3.3.8), (3.3.9), (3.3.20) следует, что

$$u_\mu(k,x^0)=0 \quad при \quad \mu<\ell\,. \qquad (3.3.21)$$

А из (3.3.7), (3.3.12), (3.3.13), (3.3.21) следует, что

$$u(k,x^0,y)=0.$$

Так как x^0 произвольная точка пространства R_n, то получаем

$$u(k,x,y)=0.$$

Теорема 3.3.1 доказана.

Замечание. Решение задачи (3.1.1)-(3.1.2), выделенное принципом предельного поглощения, удовлетворяет парциальным условиям излучения (3.3.2), (3.3.3).

Действительно, решение задачи (3.1.1)-(3.1.2), выделенное принципом предельного поглощения, определяется формулами (3.1.16), (3.1.17) при $\varepsilon=0$. Из (3.1.17) получаем

$$u_\mu(k,x)=\frac{i(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{4N}\int\limits_{R_n}\cdots\int|x-\xi|^{1-\frac{n}{2}}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu\mu}^{\frac{n}{2}-2N+1}\times$$

$$\times H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x-\xi|\eta_{\nu\mu}\right)f_\mu(\xi)d\xi, \qquad (3.3.22)$$

где $f_\mu(\xi)$ определено формулой (3.1.10), бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель. Пусть $\lambda_\mu>k^2$. Тогда из (3.1.12)

$$\frac{\pi}{2N} \le \arg\eta_{\nu\mu} \le \pi - \frac{\pi}{2N}, \quad \nu = 0,1,\dots,N-1.$$

Отсюда

$$\min_{0\le\nu\le N-1} Jm\eta_{\nu\mu} = \sin\frac{\pi}{2N} > 0.$$

Тогда $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{\nu\mu}\right)$, $\nu = 0,1,\dots,N-1$ при $|x| \to +\infty$ экспоненциально убывает. Из замечания к лемме (3.3.1), (3.3.22) и асимптотической оценки (1.1.5) получим

$$u_\mu(k,x) = O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}} \exp\left(-|x|\sin\frac{\pi}{2N}\right)\right), \quad \mu = \ell+1, \ell+2,\dots \quad (3.3.23)$$

Аналогичным образом, используя формулу дифференцирования функций Ханкеля, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|} - i\eta_{0\mu}\right) u_\mu(k,x) = O\left(|x|^{\frac{1-n}{2}} \exp\left(-|x|\sin\frac{\pi}{2N}\right)\right),$$

$$\mu = \ell+1, \ell+2,\dots \quad (3.3.24)$$

Рассмотрим случай $\lambda_\mu \le k^2$. Из (3.1.12) получаем, что $Jm\eta_{0\mu} = 0$. Для всех слагаемых в (3.3.22) с $\nu = 1,2,\dots,N-1$, как и выше, получим оценку (3.3.23) и (3.3.24). Для слагаемых с $\nu = 0$ из (1.1.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|} - i\eta_{0\mu}\right)\left[\eta_{0\mu}^{\frac{n}{2}-1} |x|^{1-\frac{n}{2}} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}\left(|x|\eta_{0\mu}\right)\right] = O\left(|x|^{-\frac{1+n}{2}}\right)$$

и из леммы 3.3.1 получаем (3.3.2) и (3.3.3).

Замечание к теореме 3.3.1 доказано.

ГЛАВА IV

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В этой главе доказаны принципы предельного поглощения и предельной амплитуды для краевой задачи в полупространстве для эллиптических систем уравнений с параметром, получающихся из смешанной задачи для строгогиперболических систем уравнений с постоянными коэффициентами после преобразования Лапласа относительно временной переменной, а также поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи в четверти пространства для строго гиперболических уравнений высокого порядка с финитным возмущением.

Смешанная задача для строго гиперболических систем уравнений в четверти пространства решена Х.О.Крайсом [30], Р.Сакамато [31], [32], Т.Балабаном [33]. Корректная постановка краевых задач в полупространстве и в четверти пространства изучена Г.Е.Шиловым и его учениками [34]. Затем появилась работа М.С.Аграновича [35], в которой изучалась общая краевая задача для эллиптических систем уравнений с комплексным параметром.

Принцип предельного поглощения и предельной амплитуды для краевой задачи в полупространстве для эллиптического уравнения высокого порядка с параметром рассмотрены в [37].

§ 4.1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $R_n^+ = \{x : x \in R_n,\ x_1 \geq 0\}$ - полупространство, $x^* = (x_2, x_3, ..., x_n)$ и $\xi^* = (\xi_2, \xi_3, ..., \xi_n)$ - двойственные переменные относительно преобразования Фурье F.

Рассмотрим в четверти пространства $R_{n+1}^{++} = \{(t,x) : t > 0, x_1 > 0, x^* \in R_{n-1}\}$ смешанную задачу

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) + f(t,x) \qquad (4.1.1)$$

с начальным условием

$$u(0,x) = 0 \qquad (4.1.2)$$

и краевым условием

$$u_1(t,0,x^*) = 0, u_2(t,0,x^*) = 0, ..., u_r(t,0,x^*) = 0, \qquad (4.1.3)$$

где

$$u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), ..., u_m(t,x)),$$
$$f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), ..., f_m(t,x))$$

столбцевые вектор-функции,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = A\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{n} B_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

A и B_i – постоянные квадратные матрицы порядка m. Предположим, что матрица A невырождена и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^- & 0 \\ 0 & A^+ \end{pmatrix},$$

$$A^{-} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_r \end{pmatrix} < 0,$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} a_{r+1} & & & & 0 \\ & a_{r+2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_m \end{pmatrix} > 0,$$

что не является ограничением. Через $|x|$ будем обозначать евклидову норму вектора x, через $\|A\|$ - норму матрицы A, E – единичную матрицу

$$D_{x^*}^{\nu} = \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_2^{\nu_2} \cdots \partial x_n^{\nu_n}}, \quad \nu = (\nu_2, \nu_3, ..., \nu_n), \ |\nu| = \nu_2 + \nu_3 + ... + \nu_n$$

Определение 4.1.1. *Система уравнений (4.1.1) называется строго гиперболической, если при вещественных $\xi, |\xi| = 1$ собственные значения матрицы*

$$P(i\xi) = iA\xi_1 + iB(\xi^*), \quad B(\xi^*) = \sum_{j=2}^{n} B_j \xi_j$$

чисто мнимые и различные.

Положим $k = k_1 + ik_2$, $M = A^{-1}\left(kE - iB(\xi^*)\right)$. Имеет место

Лемма 4.1.1. *При* $k_1 > 0$ *матрица* M *имеет в точности* r *собственных значений* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *и* $m - r$ *собственных значений с* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

В условии (4.1.3) число r равно числу собственных значений матрицы M с отрицательными вещественными частями.

Определение 4.1.2. *Вектор-функцию* $u(t,x)$ *будем называть решением задачи (4.1.1)-(4.1.3), если она имеет непрерывные производные по* t, x, *для которых*

$$\int_{R_n^+}\left|\frac{\partial^{\alpha} u(t,x)}{\partial t^{\alpha}}\right|dx < +\infty, \qquad \int_{R_n^+}\left|\frac{\partial^{\beta_j} u(t,x)}{\partial x^{\beta_j}}\right|dx < +\infty, \qquad \alpha, \beta_j = 0,1,$$

и удовлетворяет задаче (4.1.1)-(4.1.3) в обычном смысле.

§ 4.2. Оценки решения стационарной задачи и принцип предельного поглощения

Чтобы решить задачу (4.1.1)-(4.1.3), произведем в этой задаче преобразование Лапласа по t. Будем предполагать, что $f(t,x) = f(x)e^{i\omega t}$. Тогда

$$kw(k,x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)w(k,x) + \frac{f(x)}{k - i\omega}, \tag{4.2.1}$$

с граничным условием

$$w_1(k,0,x^*) = 0, w_2(k,0,x^*) = 0, \ldots, w_r(k,0,x^*) = 0, \tag{4.2.2}$$

где $w(k,x)$ - преобразование Лапласа от $u(t,x)$.

Определение 4.2.1. *Будем говорить, что для задачи (4.2.1)-(4.2.2) имеет место принцип предельного поглощения, если существует предел*

$$w(ik_2, x) = \lim_{k_1 \to 0} w(k, x)$$

равномерно по x *в каждом компакте из* R_n^+ *и* $w(ik_2, x)$ *удовлетворяет предельной задаче (4.2.1)-(4.2.2) при* $k_1 = 0$.

Изучим суммируемое в R_n^+ вместе с производными, входящими в уравнение, решение $w(k,x)$ задачи (4.2.1)-(4.2.2) при $k_1 > 0$. Заменим свободный член в правой части (4.2.1) на $f(x)$ и решение задачи (4.2.1)-(4.2.2) с этим свободным членом также обозначим через $w(k,x)$. Производя в (4.2.1)-(4.2.2) преобразование Фурье по x^* и учитывая невырожденность матрицы A, получим следующую задачу:

$$\frac{d\vartheta(k, x_1, \xi^*)}{dx_1} = M(k, \xi^*)\vartheta(k, x_1, \xi^*) + g(x_1, \xi^*) \qquad (4.2.3)$$

с граничным условием

$$\vartheta_1(k, 0, \xi^*) = 0, \vartheta_2(k, 0, \xi^*) = 0, ..., \vartheta_r(k, 0, \xi^*) = 0, \qquad (4.2.4)$$

где

$$\vartheta(k, x_1, \xi^*) = F(w(k, x)), - A^{-1}F(f(x)) = g(x_1, \xi^*).$$

Разложим пространство R_m, в котором действует оператор M, в прямую сумму подпространств R_r^- и R_{m-r}^+, первое из которых порождается собственными (и присоединенными) векторами матрицы M, соответствующими собственным значениям с отрицательными вещественными частями, а второе – собственными (и присоединенными) векторами, соответствующими собственным значениям с положительными вещественными частями. Тогда разлагаются и векторы

$$\vartheta=(\vartheta^{-},\vartheta^{+}),\qquad g=(g^{-},g^{+}).$$

Имеет место

Теорема 4.2.1. *Пусть* $f(x)$ *по* x^{*} *имеет суммируемые производные до порядка* $m+n+1$

$$\int\limits_{R_{n-1}}\left|D_{x^*}^{\nu}f(x)\right|dx^{*}\le\frac{C}{(1+x_1)^{m+1}},\qquad |\nu|=0,1,\dots,m+n-1.$$

Тогда существует единственное решение задачи (4.2.1)-(4.2.2) и оно определяется формулой

$$w(k,x)=(w^{-},w^{+})=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\times$$
$$\times\int\limits_{R_{n-1}}\vartheta(k,x_1,\xi^{*})\exp\left[-i(x^{*},\xi^{*})\right]d\xi^{*},\tag{4.2.5}$$

где

$$\vartheta^{-}(k,x_1,\xi^{*})=\int\limits_{0}^{x_1}\exp\left[(x_1-\tau)M(k,\xi^{*})\right]g^{-}(\tau,\xi^{*})d\tau,$$
$$\vartheta^{+}(k,x_1,\xi^{*})=\int\limits_{x_1}^{\infty}\exp\left[(x_1-\tau)M(k,\xi^{*})\right]g^{+}(\tau,\xi^{*})d\tau,\tag{4.2.6}$$

а C *– постоянная.*

Доказательство. С помощью метода вариации постоянных находим, что решение уравнения (4.2.3), абсолютно интегрируемое по x_1 в $[0,\infty)$, имеет вид

$$\vartheta(k,x_1,\xi^{*})=\int\limits_{0}^{x_1}\exp\left[(x_1-\tau)M(k,\xi^{*})\right]g^{-}(\tau,\xi^{*})d\tau-$$
$$-\int\limits_{x_1}^{\infty}\exp\left[(x_1-\tau)M(k,\xi^{*})\right]g^{+}(\tau,\xi^{*})d\tau+\exp\left[x_1M(k,\xi^{*})\right]c_0.$$

Удовлетворив граничным условиям (4.2.4), однозначно определим вектор $\bar{c}_0 = 0$.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $f(x)$ *по* x^* *имеет суммируемые производные до порядка* $2m+n-1$ *и*

$$\int\limits_{R_{n-1}} \left| D^{\nu}_{x^*} f(x) \right| dx^* \le \frac{C}{1+x_1^{2m+1}}, \qquad |\nu| = 0,1,\ldots,2m+n-1.$$

Тогда для задачи (4.2.1)-(4.2.2) имеет место принцип предельного поглощения и

$$\begin{gathered} |w(i\beta,x) - w(k,x)| \le C_1(\beta,k)|i\beta - k|, \\ \left| P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(w(i\beta,x) - w(k,x)) \right| \le C_2(\beta,k)|i\beta - k| \end{gathered} \tag{4.2.7}$$

равномерно по x *в каждом компакте из* R_n^+, *где* β *- вещественное число,* $c_i(\beta,k)$ *- полином от* β *и* k *степени* $m-1$.

Доказательство. Оценим $\vartheta^-(k,x_1,\xi^*)$ при больших $|\xi|$, а $\vartheta^+(k,x_1,\xi^*)$ при больших x_1 и $|\xi^*|$. Из условия теоремы следует, что

$$|g(\tau,\xi^*)| \le \frac{C}{\left(1+|\xi^*|\right)^{2m+n+1}(1+\tau)^{m+1}}.$$

Используя оценку для нормы матрицы $\exp[(x_1-\tau)M]$ в подпространстве R_r^- (см. [34], стр.242), получим

$$|\vartheta^-(k,x_1,\xi^*)| \le C(k)\int\limits_0^{x_1} |x_1-\tau|^{m-1}\left(1+|\xi^*|^{m-1}\right)|g^-(\tau,\xi^*)|d\tau.$$

Отсюда

$$\left|\vartheta^{-}(k,x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C(k)}{1+\left|\xi^*\right|^{m+n}} \qquad (4.2.8)$$

равномерно по x_1 из компакта, где $C(k)$ – полином от k степени $m-1$. Аналогично в пространстве R^+_{m-r}

$$\left|\vartheta^{+}(k,x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C(k)}{1+\left|\xi^*\right|^{m+n}} \int\limits_{x_1}^{\infty} \left|x_1-\tau\right|^{m-1} \frac{d\tau}{1+\tau^{2m+1}}.$$

Но последний интеграл при $x_1 \to +\infty$ убывает как $x_1^{-(m+1)}$. Поэтому при больших x_1 и $\left|\xi^*\right|$

$$\left|\vartheta^{+}(k,x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C(k)}{\left(1+x_1^{m+1}\right)\left(1+\left|\xi^*\right|\right)^{m+n}}. \qquad (4.2.9)$$

Пусть $\vartheta(k',x_1,\xi^*)$ и $\vartheta(k'',x_1,\xi^*)$ - решения задачи (4.2.3)-(4.2.4) для двух различных k' и k'' с положительными вещественными частями.

Обозначим

$$z(k',k'',x_1,\xi^*) = \vartheta(k',x_1,\xi^*) - \vartheta(k'',x_1,\xi^*)$$

Тогда $z(k',k'',x_1,\xi^*)$ – решение краевой задачи

$$\frac{dz(k',k'',x_1,\xi^*)}{dx_1} = M(k',\xi^*)z(k',k'',x_1,\xi^*) +$$

$$+A^{-1}(k'-k'')\vartheta(k'',x_1,\xi^*) \qquad (4.2.10)$$

с граничным условием:

$$z_1(k',k'',0,\xi^*)=0, z_2(k',k'',0,\xi^*)=0,\ldots,z_r(k',k'',0,\xi^*)=0. \quad (4.2.11)$$

Применяя теорему 4.2.1, определим $z(k',k'',x_1,\xi^*)$. Из формулы (4.2.6) для решения задачи (4.2.10)-(4.2.11) получим

$$\left|z^{-}(k',k'',x_1,\xi^*)\right| \le C\left|k'-k''\right| \times$$

$$\times \int\limits_0^{x_1} \left|x_1-\tau\right|^{m-1} \left\|M(k',\xi^*)\right\| \left|\vartheta^{-}(k'',\tau,\xi^*)\right| d\tau. \qquad (4.2.12)$$

Из (4.2.8), (4.2.12) имеем

$$\left|z^{-}(k',k'',x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C_1(k',k'')\left|k'-k''\right|}{1+\left|\xi^*\right|^{n+1}} \qquad (4.2.13)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта. Аналогичным образом из выражения для $z^{+}(k',k'',x_1,\xi^*)$ и из (4.2.9) находим, что

$$\left|z^{+}(k',k'',x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C_1(k',k'')\left|k'-k''\right|}{1+\left|\xi^*\right|^{n+1}} \qquad (4.2.14)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта. Из (4.2.13), (4.2.14) следует, что

$$\left|z(k',k'',x_1,\xi^*)\right| \le \frac{C_1(k',k'')\left|k'-k''\right|}{1+\left|\xi^*\right|^{n+1}} \qquad (4.2.15)$$

Производя обратное преобразование Фурье над $z(k',k'',x_1,\xi^*)$ и используя (4.2.15), получаем

$$\left|w(k',x)-w(k'',x)\right| \le C_1(k',k'')\left|k'-k''\right|. \qquad (4.2.16)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта и $x^* \in R_{n-1}$. Из (4.2.8), (4.2.10), (4.2.15) следует, что

$$\left|\frac{dz(k',k'',x_1,\xi^*)}{dx_1}\right| \le \frac{C_2(k',k'')|k'-k''|}{1+|\xi^*|^n}$$

равномерно по x_1 из каждого компакта. После обратного преобразования Фурье по $|\xi^*|$ будем иметь

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}w(k',x)-\frac{\partial}{\partial x_1}w(k'',x)\right| \le C_2(k',k'')|k'-k''|. \quad (4.2.17)$$

Из (4.2.15) также следует, что

$$\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\right)(w(k',x)-w(k'',x))\right| \le C_2(k',k'')|k'-k''|. \quad (4.2.18)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта и $x^* \in R_{n-1}$. В силу (4.2.8)-(4.2.9) возможен предельный переход под знаком интеграла в (4.2.5) при $k_1 \to 0$ равномерно по x в каждом компакте. Аналогичное утверждение справедливо и для $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)w(k,x)$. Поэтому, переходя к пределу в (4.2.1)-(4.2.2) при $k_1 \to 0$, получаем, что $w(ik_2,x)$ удовлетворяет предельной задаче, а из (4.2.16)-(4.2.18) следует (4.2.7).

Лемма 4.2.1. *Пусть* $D^{\mu}_{x_1} f(x), \mu = 0,1$ *по* x^* *имеет суммируемые производные до порядка* $m+n$ *и*

$$\int\limits_{R_{n-1}} |D^{\mu}_{x_1} D^{\nu}_{x^*} f(x)| dx^* \le \frac{C}{1+x_1^{m+1}}, \qquad |\nu| = 0,1,\dots,m+n.$$

Тогда при $k_2 \to \infty$

$$|w(ik_2,x)| \le \frac{C}{|k_2|}$$

равномерно по x_1 *из каждого компакта и* $x^* \in R_{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим

$$w^+(ik_2,x) = \frac{-1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp\left[-i(x^*,\xi^*)\right] d\xi^* \times$$

$$\times \int\limits_{x_1}^{\infty} \exp\left[(x_1-\tau)M(ik_2,\xi^*)\right] g^+(\tau,\xi^*)d\tau. \quad (4.2.19)$$

Разобьем интеграл по ξ^* в (4.2.19) на две части:

$$w_1^+(ik_2,x)+w_2^+(ik_2,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\left(\int\limits_{|\xi^*|\le\varepsilon|k_2|} d\xi^* + \int\limits_{|\xi^*|\ge\varepsilon|k_2|} d\xi^* \right)\times$$

$$\times \int\limits_{x_1}^{\infty} \exp\left[(x_1-\tau)M(ik_2,\xi^*)\right] g^+(\tau,\xi^*)d\tau, \quad (4.2.20)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Изучим каждое слагаемое в (4.2.20) при $k_2 \to \infty$. Представим матрицу M в виде

$$M(ik_2,\xi^*) = |k_2| A^{-1}\left(\frac{ik_2}{|k_2|} E - iB\left(\frac{\xi^*}{|k_2|} \right) \right).$$

Так как $\frac{|\xi^*|}{|k_2|} \le \varepsilon$ для w_1^+ и элементы матрицы B однородны с порядком однородности один, то из теории возмущения известно, что собственные значения матрицы M будут различны. Поэтому на базисе из собственных векторов матрица M будет иметь диагональный вид. Тогда

$$\exp[(x_1-\tau)M]g^+ = \begin{pmatrix} \exp\left[(x_1-\tau)|k_2|\lambda_{r+1}\left(\frac{ik_2}{|k_2|},\frac{\xi^*}{|k_2|}\right)\right]g_{r+1}(\tau,\xi^*) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \exp\left[(x_1-\tau)|k_2|\lambda_m\left(\frac{ik_2}{|k_2|},\frac{\xi^*}{|k_2|}\right)\right]g_m(\tau,\xi^*) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы должны изучать при $k_2 \to \infty$ интегралы вида

$$w_{1_j}^+(ik_2,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{|\xi^*|\le\varepsilon|k_2|} \exp[-i(x^*,\xi^*)]d\xi^* \times$$

$$\times \int\limits_{x_1}^{\infty} \exp\left[(x_1-\tau)|k_2|\lambda_j\left(\frac{ik_2}{|k_2|},\frac{\xi^*}{|k_2|}\right)\right]g_j(\tau,\xi^*)d\tau,$$

$$j = r+1, r+2, \ldots, m. \qquad (4.2.21)$$

Так как при $\frac{|\xi^*|}{|k_2|} \le \varepsilon$ для собственных значений λ_j имеет место оценка

$$\left|\lambda_j\left(\frac{ik_2}{|k_2|},\frac{\xi^*}{|k_2|}\right)\right| \ge c_0 > 0,$$

то при больших $|k_2|$, интегрируя внутренний интеграл в (4.2.21) один раз по частям по τ и оценивая по модулю, получим

$$|w_{1_j}^+(ik_2,x)| \le \frac{C}{|k_2|}\left(\int\limits_{R_{n-1}} |g_j(x_1,\xi^*)|d\xi^* + \int\limits_{R_{n-1}} d\xi^* \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial\tau} g_j(\tau,\xi^*)\right| d\tau\right),$$

$$j = r+1, r+2, \ldots, m. \qquad (4.2.22)$$

Из (4.2.20)-(4.2.22) следует, что при больших $|k_2|$ имеет место оценка

$$\left|w_1^+(ik_2,x)\right| \le \frac{C}{|k_2|} \qquad (4.2.23)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта и $x^* \in R_{n-1}$.

Рассмотрим теперь $w_2^+(ik_2,x)$. Оценим это по норме в подпространстве R_{m-r}^+, используя оценку нормы матрицы $\exp[(x_1-\tau)M]$ (см. [34], стр.242). Тогда

$$\left|w_2^+(ik_2,x)\right| \le \int\limits_{|\xi^*|\ge\varepsilon|k_2|} \left\|\exp[(x_1-\tau)M)]\right\| \left|g^+(\tau,\xi^*)\right| d\tau \le$$

$$\le C(\varepsilon)\int\limits_{\varepsilon|k_2|}^{\infty} \left|\xi^*\right|^{m+n-3} d\left|\xi^*\right| \int\limits_{x_1}^{\infty} \left|x_1-\tau\right|^{m-1} \left|g^+(\tau,\xi^*)\right| d\tau.$$

Используя условия на $f(x)$, при $k_2 \to \infty$ имеем

$$\left|w_2^+(ik_2,x)\right| \le \frac{C}{|k_2|} \qquad (4.2.24)$$

равномерно по x_1 из каждого компакта и $x^* \in R_{n-1}$. Из (4.2.23), (4.2.24) следует, что при больших $|k_2|$

$$\left|w^+(ik_2,x)\right| \le \frac{C}{|k_2|}. \qquad (4.2.25)$$

Точно так же, как и выше, рассматривается

$$w^-(ik_2,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp\left[i(x^*,\xi^*)\right] d\xi^* \times$$

$$\times \int\limits_0^{x_1} \exp\left[(x_1-\tau)M(ik_2,\xi^*)\right] g^-(\tau,\xi^*) d\tau$$

и доказывается, что при $k_2 \to \infty$

$$\left|w^-(ik_2, x)\right| \leq \frac{C}{|k_2|} \tag{4.2.26}$$

равномерно по x_1 из каждого компакта и $x^* \in R_{n-1}$.

Из (4.2.25), (4.2.26) следует доказательство леммы.

§ 4.3. Принцип предельной амплитуды для гиперболических систем уравнений с постоянными коэффициентами

Решение задачи (4.1.1)-(4.1.3) восстанавливается по решению стационарной задачи (4.2.1), (4.2.2) согласно формуле:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{w(k,x)}{k - i\omega}\exp(kt)dk, \tag{4.3.1}$$

где $\varepsilon > 0$. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.3.1. *Пусть* $D^{\mu}_{x_1} f(x)$, $\mu = 0,1$ *по* x^* *имеют суммируемые производные до порядка* $2m+n$ *и*

$$\int_{R_{n-1}} \left|D^{\mu}_{x_1} D^{\nu}_{x^*} f(x)\right| dx^* \leq \frac{C}{1 + x_1^{2m+1}}, \qquad |\nu| = 0,1,\ldots,2m+n.$$

Тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \exp(-i\omega t) u(t,x) = w(i\omega, x)$$

равномерно по x *в каждом компакте из* R_n^+, *где* $w(i\omega, x)$ *- решение задачи (4.2.1), (4.2.2) при* $k = i\omega$.

Доказательство. Рассмотрим контур

$$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{7}\Gamma_i, \quad где \quad \Gamma_1=(-i\infty,-iD), \ \ \Gamma_2=[-iD,-i(\omega-\delta)],$$

$$\Gamma_3=(i(\omega-\delta),\Delta+i(\omega-\delta)], \quad \Gamma_4=(\Delta+i(\omega-\delta),\Delta+i(\omega+\delta)],$$

$$\Gamma_5=(\Delta+i(\omega+\delta),i(\omega+\delta)], \quad \Gamma_6=(i(\omega+\delta),iD], \Gamma_7=(iD,+i\infty), D>0.$$

Вектор-функция $w(k,x)$ является аналитической вектор-функцией от k при $k_1>0$ и непрерывна при $k_1=0$. Поэтому в силу леммы 4.2.1 контур интегрирования в (4.3.1) можно заменить контуром Γ. Представим $u(t,x)$ в виде

$$u(t,x)=w(i\omega,x)\exp(i\omega t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{w(k,x)-w(i\omega,x)}{k-i\omega}\exp(kt)dk.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\Gamma}\frac{w(k,x)-w(i\omega,x)}{k-i\omega}\exp(kt)dk=0$$

равномерно по x в каждом компакте из R_n^+. Возьмем достаточно малое число $\varepsilon_1>0$. В силу леммы 4.2.1 при достаточно большом D

$$\left|\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_7}\frac{w(k,x)}{k-i\omega}\exp(kt)dk\right|<\varepsilon_1 \qquad (4.3.2)$$

равномерно по x_1 из компакта и $x^*\in R_{n-1}$.

Так как

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\Gamma_\mu}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}dk=0, \quad \mu=1;7;$$

то из (4.3.2) следует, что при больших D и $t\to+\infty$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_7} \frac{w(k,x) - w(i\omega,x)}{k - i\omega} \exp(kt)dk \right| \le 3\varepsilon_1 \qquad (4.3.2)$$

равномерно по x_1 из компакта и $x^* \in R_{n-1}$.

По лемме Римана

$$\lim_{t \to +\infty} \int\limits_{\Gamma_2 \cup \Gamma_6} \frac{w(k,x) - w(i\omega,x)}{k - i\omega} \exp(kt)dk = 0 \qquad (4.3.3)$$

равномерно по x в каждом компакте из R_n^+. В силу теоремы 4.2.2

$$\left| \int\limits_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} \frac{w(k,x) - w(i\omega,x)}{k - i\omega} \exp(kt)dk \right| \le C\Delta \exp(t\Delta), \qquad (4.3.4)$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_4} \frac{w(k,x) - w(i\omega,x)}{k - i\omega} \exp(kt)dk \right| \le C\delta \exp(t\Delta). \qquad (4.3.5)$$

Из (4.3.4), (4.3.5) следует, что при $\Delta \to 0$, достаточно малом δ и при любом $t > 0$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} \frac{w(k,x) - w(i\omega,x)}{k - i\omega} \exp(kt)dk \right| < \varepsilon_1 \qquad (4.3.6)$$

равномерно по x_1 из любого компакта и $x^* \in R_{n-1}$.

Из (4.3.2), (4.3.3) и (4.3.6) следует доказательство теоремы 4.3.1.

Замечание. Утверждение §4.2, §4.3 остаются в силе, когда матрица $P(i\xi)$ имеет при $\xi \ne 0$ кратные собственные значения, но при дополнительных условиях на функцию $f(x)$. Так, например, если

$\frac{\partial^{\nu}}{\partial x_1^{\nu}} f^{-}(0,x^{*}) = 0, \nu = 0,1,\ldots,r_1 - 1$ и выполнены остальные условия теоремы 4.3.1 при $\nu = r_2$, то для задачи (4.3.1)-(4.3.3) справедлив принцип предельной амплитуды, где r_1 - наибольшая кратность собственных значений с отрицательной вещественной частью, а r_2 – наибольшая кратность собственных значений с положительной вещественной частью. Смешанная задача (4.3.1)-(4.3.3), когда матрица $P(i\xi)$ имеет кратные собственные значения, изучена в работе [36].

§ 4.4. Поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи для гиперболических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами

В этом параграфе изучено поведение при $t \to +\infty$ решения смешанной задачи в четверти пространства для уравнений в частных производных высокого порядка с переменными коэффициентами, главные части которых являются строго гиперболическими дифференциальными выражениями. Доказано, что при конечном числе условий ортогональности на правую часть уравнения имеет место принцип предельной амплитуды.

Пусть $R_2^{++} = \{(t,x) : (t,x) \in R_2,\ t > 0,\ x > 0\}$.

Рассмотрим в R_2^{++} следующую задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) + T\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = f(x)\exp(i\omega t). \quad (4.4.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = 0, \frac{\partial u(o,x)}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u(o,x)}{\partial t^{m-1}} = 0 \quad (4.4.2)$$

и граничными условиями

$$u(t,0) = 0, \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \ldots, \frac{\partial^{r-1} u(t,0)}{\partial x^{r-1}} = 0, \qquad (4.4.3)$$

где $L(p,\xi)$ - однородный полином по (p,ξ) степени m с вещественными коэффициентами, ω - вещественное число.

$T\left(x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ - дифференциальный оператор по $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$ порядка меньше $m-1$ с финитными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, $f(x)$ - принадлежащая $L_2(R_1^+)$ финитная функция, а число $r \le m-1$ определено ниже. Через $L_{2,\psi}(R_1^+)$ обозначим пространство функций $F(x)$, для которых $\psi(x)F(x) \in L_2(R_1^+)$, где $\psi = \exp(-x^2)$.

В силу определения строго гиперболичности уравнения в §4.2 имеем, что при вещественных $\xi \ne 0$ корни уравнения

$$L(k, i\xi) = 0$$

по k чисто мнимы и различные. Как указано в лемме 4.1.1, при $\operatorname{Re} k > 0$ корни уравнения

$$L(k, \lambda) = 0 \qquad (4.4.4)$$

распадаются на две группы.

Через $H^s(R_1^+)$ обозначим пространство Соболева-Слободецкого, состоящее из функций, определенных в R_1^+, преобразование Фурье которых является локально интегрируемой функцией $\tilde{u}(\xi)$, такой, что

$$\|u\|^2_{H^s(R_1^+)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

а $$H^m_{0,r}(R_1^+) = \left\{ u(x) : u(x) \in H^m(R_1), \left.\frac{d^\nu u(x)}{dx^\nu}\right|_{x=0} = 0 \right\}$$

$$\nu = 0,1,\ldots,r; \;\; r < m$$

Определение 4.4.1. *Решением задачи (4.4.1)-(4.4.3) называется функция* $u(t,x) \in C^m\left[[0,\infty), H^m_{0,r}(R_1^+)\right]$, *удовлетворяющая уравнению (4.4.1) в смысле* L_2.

Совершим в (4.4.1)-(4.4.3) преобразование Лапласа по t. Тогда получим

$$L\left(k, \frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}(k,x) + T\left(x,k,\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}(k,x) = \frac{f(x)}{k - i\omega}, \quad (4.4.5)$$

с краевыми условиями

$$\hat{u}(k,0) = 0, \; \frac{\partial \hat{u}(k,0)}{\partial x} = 0, \ldots, \frac{\partial^{r-1}\hat{u}(k,0)}{\partial x^{r-1}} = 0, \qquad (4.4.6)$$

где $\hat{u}(k,x)$ - преобразование Лапласа по t от $u(t,x)$. Нами в [37] доказано, что при $\operatorname{Re} k > 0$ для принадлежащего $L_2(R_1^+)$ решения задачи (4.4.5), (4.4.6) (с правой частью $f(x)$ в (4.4.5)) когда $T\left(x,k,\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv 0$, имеет место формула

$$\hat{u}_1(k,x) = L^{-1}(k) f(x) = \int_0^\infty G(k,x,\eta) f(\eta) d\eta,$$

где функция Грина $G(k,x,\eta)$ этой краевой задачи определяется следующим образом:

$$G(k,x,\eta)=$$

$$=\begin{cases} G_1=\sum_{i=1}^{r}\dfrac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r}{}' \left(\lambda_i(k)-\lambda_\nu(k)\right)}\sum_{j=i,r+1}^{m}\dfrac{\exp\left(\lambda_i(k)x-\lambda_j(k)\eta\right)}{\prod\limits_{\mu=i,r+1}^{m}{}' \left(\lambda_j(k)-\lambda_\mu(k)\right)} & npu\, x>\eta \\ G_2=-\sum_{j=r+1}^{m}\dfrac{1}{\prod\limits_{\mu=r+1}^{m}{}' \left(\lambda_j(k)-\lambda_\mu(k)\right)}\sum_{i=j,1}^{r}\dfrac{\exp\left(\lambda_i(k)x-\lambda_j(k)\eta\right)}{\prod\limits_{\nu=j,1}^{r}{}' \left(\lambda_i(k)-\lambda_\nu(k)\right)} & npu\, x<\eta \end{cases}$$

(4.4.7)

здесь штрих у знака произведения означает, что множители с одинаковыми индексами отсутствуют, а $\lambda_j(k)$ - корни уравнения (4.4.4).

Так как $L(k,\lambda)$ есть однородный многочлен по (k,λ), то корни уравнения (4.4.4) имеют вид

$$\lambda_j(k)=\alpha_j k,\quad j=1,2,...,m \tag{4.4.8}$$

В силу строгой гиперболичности $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ числа α_j вещественны и $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$. В силу леммы 4.1.1 $\alpha_j<0$ при $j=1,2,...,r$, а $\alpha_j>0$ при $j=r+1,r+2,...,m$. Предположим, что

$$\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_r<0;\qquad \alpha_{r+1}>\alpha_{r+2}>...>\alpha_m>0.$$

Приведем лемму, которая необходима для дальнейшего.

Лемма 4.4.1.

а) Функция Грина $G(k,x,\eta)$ голоморфна по k в полуплоскости $\mathrm{Re}\,k>0$ и в этой полуплоскости для нее имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^\ell G(k,x,\eta)}{\partial x^\ell}\right|\le\frac{C_\ell}{1+|k|^{m-1-\ell}}\exp[\mathrm{Re}\,k(\alpha_r x-\alpha_m\eta)],\quad x\neq\eta, \tag{4.4.9}$$

б) Функция $G(k,x,\eta)$ аналитически продолжается в полуплоскости $\operatorname{Re}k \le 0$ и в этой полуплоскости для нее имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial^\ell G(k,x,\eta)}{\partial x^\ell}\right| \le \frac{C_\ell}{1+|k|^{m-1-\ell}} \exp[\operatorname{Re}k(\alpha_1 x - \alpha_{r+1}\eta)], \quad x \ne \eta, \qquad (4.4.10)$$

в) $$\frac{\partial^\ell G(k,0,\eta)}{\partial x^\ell} = 0, \quad \eta > 0, \quad \ell \le r-1, \qquad (4.4.11)$$

при всех k, здесь C_ℓ - постоянная.

Доказательство. Голоморфность $G(k,x,\eta)$ по k при $\operatorname{Re}k > 0$ и ее аналитическая продолжаемость на полуплоскость $\operatorname{Re}k \le 0$ следует из выражения $G(k,x,\eta)$ и из выражений (4.4.8) характеристических корней $\lambda_j(k)$. Покажем, что точка $k=0$ является устранимой особой точкой для $G(k,x,\eta)$. Из вида $G(k,x,\eta)$ следует, что G_1 и G_2 соответственно являются двойными разделенными разностями вида $\Phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_r;\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_m)$ и $\Phi(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_m;\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ [34] (стр.228) для функции $\exp(x\lambda - \eta\xi)$. Разлагая экспоненты в ряд, в выражениях G_1 и G_2 получаем, что члены, содержащие $\left(\lambda_i(k)x - \lambda_j(k)\eta\right)^\mu$, $\mu \le m-2$, обращаются в нуль, так как они будут двойными разделенными разностями от функции $(\lambda x - \eta k)^\mu$. Поэтому числители и знаменатели в (4.4.7) в точке $k=0$ имеют нуль порядка $m-1$ и при $k \to 0$ $G(k,x,\eta)$ имеет конечный предел. Оценки (4.4.9), (4.4.10) следуют из (4.4.7). Из (4.4.7) также получаем, что

$$\left.\frac{\partial^\ell G_2(k,x,\eta)}{\partial x^\ell}\right|_{x=0} = -\sum_{j=r+1}^{m} \frac{\exp\left(-\lambda_j(k)\eta\right)}{\prod\limits_{\mu=r+1}^{m}{}' \left(\lambda_j(k)-\lambda_\mu(k)\right)} \sum_{i=j,1}^{r} \frac{\lambda_i^\ell(k)}{\prod\limits_{\nu=j,1}^{r}{}' \left(\lambda_i(k)-\lambda_\nu(k)\right)}.$$

Так как

$$\sum_{i=j,1}^{r}\frac{\lambda_i^{\ell}(k)}{\prod\limits_{\nu=j,1}^{r}{}'\left(\lambda_i(k)-\lambda_{\nu}(k)\right)}=0, \qquad npu \quad \ell\le r-1,$$

то отсюда следует доказательство пункта в) леммы 4.4.1. Лемма доказана.

Так же, как в [38] (стр.546), можно показать, что формула

$$\hat{u}(k,x)=L^{-1}(k)V(k,x)$$

при каждом k ($\operatorname{Re}k>0$) устанавливает взаимно однозначное соответствие между принадлежащими $H^{m}(R_1^{+})$ решениями задачи (4.4.5)-(4.4.6) и принадлежащими $L_2(R_1^{+})$ решениями уравнения

$$V(k,x)+A(k)V(k,x)=\frac{f(x)}{k-i\omega}, \tag{4.4.12}$$

где $A(k)\equiv T\left(x,k,\frac{\partial}{\partial x}\right)L^{-1}(k)$ есть вполне непрерывный оператор, аналитически зависящий от параметра k и действующий из пространства $L_2(R_1^{+})$ в себя. В силу леммы 4.4.1 оператор $L^{-1}(k)$, следовательно, и $A(k)$, допускают аналитическое продолжение в область $\operatorname{Re}k\le 0$. В этой области $A(k)$ является вполне непрерывным оператором в пространстве $L_{2,\psi}(R_1^{+})$. Так как $T\left(x,k,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть дифференциальный оператор порядка меньше $m-1$, то из (4.4.9) следует, что при достаточно больших положительных k

$$\|A(k)\|<\varepsilon.$$

Поэтому для этих k резольвента $R(k)=(I+A(k))^{-1}$ уравнения (4.4.12) существует. В силу аналитической теоремы Фредгольма [39] (стр.224) резольвента $R(k)$ в области $\operatorname{Re}k>-\beta$ $(\beta>0)$ является оператором, конечно мероморфно зависящим от параметра k. Так как полюсов $R(k)$ в этой области конечное число, то можно выбрать число $\delta<\beta$ такое, что на прямой $\operatorname{Re}k=-\delta$ резольвента не имела полюсов.

Лемма 4.4.2. *Для решения краевой задачи (4.4.5)-(4.4.6) при* $\operatorname{Re}k=-\delta$ *имеет место оценка*

$$\left\|\hat{u}(k,x)\right\|_{L_{2,\varphi}(R_1^+)}\le\frac{C}{1+|k|^m}\|f(x)\|_{L_2(R_1^+)}. \qquad (4.4.13)$$

Доказательство. Пусть $k=-\delta+ik_2$. Используя лемму 4.4.1, получим

$$\left|\hat{u}(k,x)\right|\le\frac{C\exp(-\delta\alpha_1 x)}{1+|k|^{m-1}}\int_0^\infty\exp(\delta\alpha_{r+1}\eta)|V(k,\eta)|d\eta.$$

В силу финитности коэффициентов оператора $T\left(x,k,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ при больших x $V(k,x)$ ведет себя как $\frac{f(x)}{k-i\omega}$. Поэтому

$$\left|\hat{u}(k,x)\right|^2\le\frac{C\exp(-2\delta\alpha_1 x)}{\left(1+|k|^{m-1}\right)^2}\int_0^\infty\exp(2\delta\alpha_{r+1}+\varepsilon)\eta|V(k,\eta)|^2d\eta\le$$

$$\le\frac{C\exp(-2\delta\alpha_1 x)}{\left(1+|k|^m\right)^2}\|f(x)\|^2_{L_2(R_1^+)}.$$

Отсюда

$$\left\|\hat{u}(k,x)\right\|_{L_{2,\varphi}(R_1^+)}\le\frac{C}{1+|k|^m}\|f(x)\|_{L_2(R_1^+)}.$$

Лемма 4.4.2 доказана.

Замечание. Отметим, что оценка (4.4.13) верна и в случае, если $\mathrm{Re}\,k$ ограничена, а $|\mathrm{Im}\,k|$ достаточно большое число.

Изучим теперь при $t \to +\infty$ решение нестационарной задачи (4.4.1)-(4.4.3).

Пусть s_ν $(\nu = 1,2,...,\ell)$ - полюсы порядка q_ν резольвенты $R(k)$, расположенные в полуплоскости $\mathrm{Re}\,k > -\delta$, и первые μ из них $s_1, s_2, ..., s_\mu$ расположены на полуплоскости $\mathrm{Re}\,k \geq 0$. Тогда для $R(k)$ имеет место разложение

$$R(k) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{B_j}{\left(k - s_j\right)^{q_j}} + D(k), \qquad (4.4.14)$$

где B_j - конечномерные операторы, $D(k)$ – регулярная оператор-функция от k.

Рассмотрим два случая: а) точка $i\omega$ отлична от полюсов резольвенты $R(k)$, лежащих на мнимой оси, б) точка $i\omega$ совпадает с одним из этих полюсов, например, $i\omega = s_1$. Имеет место

Теорема 4.4.1. *Пусть выполнено а) и* $m \geq 2$. *Тогда при* $t \to +\infty$ *для решения задачи (4.4.1)-(4.4.3) имеет место разложение*

$$u(t,x) = \hat{u}(i\omega, x)\exp(i\omega t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(q_j - 1)!} \frac{d^{q_j - 1}}{dk^{q_j - 1}} L^{-1}(k) B_j f(x)\Big|_{k = s_j} + W(t,x), \qquad (4.4.15)$$

где

$$\|W(t,x)\|_{L_{2,\varphi}(R_1^+)} \leq C\exp(-\delta t)\|f(x)\|_{L_2(R_1^+)}. \qquad (4.4.16)$$

Доказательство. Решение задачи (4.4.1)-(4.4.3) восстанавливается по решению задачи (4.4.5)-(4.4.6) по формуле

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}\hat{u}(k,x)\exp(kt)dk,$$

где

$$\hat{u}(k,x)=L^{-1}(k)V(k,x)=L^{-1}(k)R(k)\frac{f(x)}{k-i\omega}.$$

Используя замечание к лемме 4.4.2, по теореме Коши получим

$$u(t,x)=L^{-1}(i\omega)V(i\omega,x)\exp(i\omega t)+\sum_{j=1}^{\ell}\underset{k=s_j}{Выч}\,\hat{u}(k,x)\exp(kt)+W(t,x),$$

где

$$W(t,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty+\delta}\hat{u}(k,x)\exp(kt)dk.$$

В силу разложения (4.4.14) имеем

$$\sum_{j=1}^{\ell}\underset{k=s_j}{Выч}\,\hat{u}(k,x)\exp(kt)=\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{(q_j-1)!}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}L^{-1}(k)B_j f(x)\Big|_{k=s_j}.$$

Оценим $\|W(t,x)\|_{L_{2,\psi}(R_1^+)}$.

$$\int_0^\infty|W(t,x)|^2\psi^2(x)dx\le\frac{\exp(-2\delta t)}{2\pi}\int_0^\infty\psi^2(x)\left(\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta}\left|\hat{u}(k,x)\right|dk\right)^2dx\le$$

$$\le C\exp(-2\delta t)\int_0^\infty\psi^2(x)dx\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta}\left(1+|k|\right)^{3/2}\left|\hat{u}(k,x)\right|^2dk.$$

По теореме Фубини в последнем интеграле можно менять порядок интегрирования. Используя оценку (4.4.13), получим

$$\int_0^\infty|W(t,x)|^2\psi^2(x)dx\le C\exp(-2\delta t)\|f\|_{L_2(R_1^+)}\int_{-i\infty-\delta}^{i\infty-\delta}\left(1+|k|^{2m-\frac{3}{2}}\right)^{-1}dk.$$

Так как $m \geq 2$, то

$$\|W(t,x)\|_{l_{2,\psi}(R_1^+)} \leq C\exp(-\delta t)\|f(x)\|_{l_2(R_1^+)}.$$

Теорема доказано. Из этой теоремы следует

Теорема 4.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.4.1 и $f(x)$ удовлетворяет конечному числу условий типа ортогональности. Тогда при $t \to +\infty$ для задачи (4.4.1)-(4.4.3) имеет место принцип предельной амплитуды, т.е.*

$$u(t,x) = \hat{u}(i\omega, x)\exp(i\omega t) + U(t,x),$$

где

$$\|U(t,x)\|_{l_{2,\psi}(R_1^+)} \leq C\exp(-\gamma t),$$

здесь $0 < \gamma \leq \delta$.

Доказательство. В этом случае все слагаемые в (4.4.13) с индексом $j \leq \mu$ обращаются в нуль, а остальные слагаемые при $t \to +\infty$ экспоненциально убывают.

Теорема 4.4.3. *Пусть имеет место случай б) и $m \geq 2$. Тогда при $t \to +\infty$ для решения (4.4.1)-(4.4.3) справедливо разложение*

$$u(t,x) = \frac{1}{q_1!}\left(\frac{d^{q_1}}{dk^{q_1}}\exp(kt)L^{-1}(k)B_1 f(x)\right)\Bigg|_{k=i\omega} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{(q_j-1)!}\frac{\exp(kt)}{k-i\omega}L^{-1}(k)B_j f(x)\Big|_{k=s_j} +$$

$$+\exp(i\omega t)L^{-1}(i\omega)D(i\omega)f(x) + W(t,x),$$

где для $W(t,x)$ удовлетворяется оценка (4.4.16).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4.1.

Таким же методом результаты §4.4 можно обобщить на многомерный цилиндр, что сделано в [68].

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва, Наука, 1973, 341с.

[2]. Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1982, 289с.

[3]. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва, Наука, 1976, 664с.

[4]. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, Наукова думка, 1981, 284с.

[5]. Новацкий В. Теория упругости. Москва, Мир, 1975, 872с.

[6]. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. Москва, Наука, 1989, 412с.

[7]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. О принципе излучения. ЖЭТФ, 1948, 18, №2, с.243-248.

[8]. Ладыженская О.А. О принципе предельной амплитуды. УМН, 1957, 12, вып.3(75), с.161-164.

[9]. Басс Г.И., Костюченко А.Г. О принципе предельной амплитуды. Вестник МГУ, сер.мат., 1959, №5, с.153-164.

[10]. Гасымов М.Г. Разложение по собственным функциям дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра. Изв.АН Азерб.ССР, сер.физ-техн. и матем. наук, 1969, №1-2.

[11]. Михайлов В.П. Об асимптотическом поведении при $t \to +\infty$ решений некоторых нестационарных граничных задач. ДАН СССР, 1965, 162, №3, с.506-509.

[12]. Михайлов В.П. О стабилизации решения одной нестационарной граничной задачи. Труды Матем. ин-та им.Стеклова, 1967, 91, с.100-112.

[13]. Исакова Е.К. О принципе предельной амплитуды для некоторых краевых задач на плоскости. ДАН СССР, 1965, 162, 5, с.986-987.
[14]. Муравей Л.А. Асимптотическое поведение решений второй внешней краевой задачи для двумерного волнового уравнения. Диф.уравнения, 1970, 6, №12, с.2248-2262.
[15]. Муравей Л.А. Асимптотическое поведение при больших значениях времени решений второй и третьей краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными. Труды Матем. ин-та им Стеклова, 1973, 126, с.73-144.
[16]. Муравей Л.А. Об асимптотическом поведении при больших значениях времени решений внешних краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными. Матем. сборник, 1978, 107(149), №1(9), с.84-133.
[17]. Вайнберг Б.Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Из-во МГУ, 1982, 293с.
[18]. Эйдус Д.М. О принципе предельного поглощения. Матем. сборник, 1962, 57, №1, с.13-44.
[19]. Эйдус Д.М. О принципе предельной амплитуды. УМН, 1969, 24, вып.3, с.91-156.
[20]. Грушин В.В. Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных. Матем. сборник, 1963, 61(103), №2, с.147-174.
[21]. Свешников А.Г. Принцип излучения. ДАН СССР, 1950, 73, №5, с.917-920.
[22]. Искендеров Б.А., Акимов А.Б. Принципы предельного поглощения, предельной амплитуды и парциальные условия излучения для краевой задачи в n-мерном слое для уравнения Гельмгольца. Диф.уравнения, 1977, 13, №8, с.1503-1505.
[23]. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода. ДАН СССР, 1951, 80, №3, с.345-347.
[24]. Федорюк М.В. Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности). Журнал

вычислительной математики и математической физики, 1972, 12 №2, с.374-387.
[25]. Фаворин В.М. О поведении при $t \to +\infty$ решения второй смешанной задачи для трехмерного волнового уравнения в цилиндрической по пространственным переменным области. ДАН СССР, 1980, 252, №6, с.1333-1336.
[26]. Векуа И.Н. О метагармонических функциях. Труды Тбилисского матем.общества, 1943, 12, с.105-184.
[27]. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва, Мир, 1974, 358с.
[28]. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва, Наука, 1957, 476с.
[29]. Никифоров А.В., Уваров В.В. Специальные функции математической физики. Москва, 1974, 303с.
[30]. Крайс Х.О. Смешанная задача для гиперболических систем. Сборник переводов Математика, 1970, 14:4, с.98-115.
[31]. Сакамато Р. Смешанная задача для гиперболических уравнений I. Сборник переводов Математика, 1972, 16:1, с.62-80.
[32]. Сакамато Р. Смешанная задача для гиперболических уравнений II. Сборник переводов Математика, 1972, 16:1, с.81-99.
[33]. Balaban T. On the mixed problem for a hyperbolic equation. Bull.Acad.Polon Sci., Ser Sci. Math. Astr. Phys., 1969, 17, №4, p.231-235.
[34]. Шилов Г.Е. Математический анализ (Второй спецкурс). Москва, Физматгиз, 1965, 327с.
[35]. Агранович М.С. Граничные задачи для систем с параметром. Матем.сборник, 1971, т.84(126), №1, с.27-64.
[36]. Агранович М.С. Одна теорема о матрице, зависящей от параметров и ее приложения к гиперболическим системам. Функциональный анализ и его приложения. 1972, т.6, вып.2, с.1-11.
[37]. Гасымов М.Г., Искендеров Б.А. Принцип предельной амплитуды для гиперболического уравнения с

постоянными коэффициентами. ДАН СССР, 1975, т.220, №5, с.1012-1014.

[38]. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. Москва, Физматгиз, 1962, 200с.

[39]. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. Москва, Физматгиз, 1981, 512с.

[40]. Шварц Л. Математические методы для физических наук. Мир, 1965.

[41]. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Наука, 1976, 391с.

[42]. Вайнберг Б.Р. Поведение решения задачи Коши для гиперболического уравнения при $t \to +\infty$. Матем.сборник, 1969, т.78(120), №4, с.542-578.

[43]. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. Москва, Мир, 1977, 504с.

[44]. Рид М., Саймон Б. Функциональный анализ. т.I, Мир, 1977, 357с.

[45]. Харазов Д.Ф. О спектре вполне непрерывных операторов, аналитически зависящих от параметра в линейных топологических пространствах. Acta scient math, Szeged, 1962, 23, №1, 38-45.

[46]. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва, Физматгиз, 1958, 678с.

[47]. Amick C.J. On the Dirichlet problem for infinite cylinders and equations with transvercely varying coefficients. Journal of differential equations, 1978, 30, p.248-279.

[48]. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решения эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. Mathematische Nachrichten, 1978, 81, p.25-82.

[49]. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, часть вторая. Москва, 1958, 432с.

[50]. Вайнберг Б.Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории

уравнений с частными производными. УМН, 1966, т.21, вып.3(129), с.114-194.
[51]. Lax P., Morawetz C., Phillips R. Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle. Comm. Pure. Appl. math. 1963, 16, №4, p.477-486.
[52]. Morawetz C. The limitmg amplitude principle. Comm. Pure Appl. math., 1962, 15, №3, p.349-361.
[53]. Herch R. Mixed problems in several variables. Journ. of Math. and Mech. 1963, 12, №3, p.317-334.
[54]. Ramm A.G., Werner P. On the limit amplitude principle for a layer. J.Reine Angew Math., 1985, 360, p.19-46.
[55]. Werner P. Resonance phenomena in cylindrical waveguides. J. Math. Anal. Appl., 1987, 121, p.173-214.
[56]. Lesky P. Resonance phenomena for a class of partial differential equations of higher order in cylindrical waveguides. Math. Methods in the Applied Sciences, 1989, vol.11, p.697-723.
[57]. Искендеров Б.А., Аббасов З.Г., Эйвазов Э.Х. Принципы излучения для уравнения Гельмгольца в цилиндрической области. ДАН Азерб.ССР, 1980, т.36, №4, с.8-11.
[58]. Искендеров Б.А. Принцип предельной амплитуды для гиперболических систем уравнений с постоянными коэффициентами. Исследования по теории дифференциальных уравнений и ее приложениям. Баку, 1981, вып.2, с.63-72.
[59]. Искендеров Б.А., Эфендиева А.Н. Принципы излучения для эллиптического уравнения высокого порядка в цилиндрической области. Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения. Сборник научных трудов всесоюзной конференции, посвященной 70-летию член-корр. АН СССР Бицадзе А.В. Нальчик, 1986, с.1.
[60]. Искендеров Б.А., Эйвазов Э.Х., Эфендиева А.Н. Принципы излучения для эллиптического уравнения высокого порядка в цилиндрической области. Диф.уравнения, 1987, т.23, №10, с.1804-1807.

[61]. Искендеров Б.А. Принцип предельной амплитуды для гиперболических уравнений. Исследования по теории дифференциальных уравнений и их приложениям. Баку, 1988, вып.3, с.45-53; ДАН Азерб.ССР, 1982, т.38, №5, с.17-21.

[62]. Iskenderov B.A. Principles of radiation for elliptic equation in the cylindrical domain. Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai. Szeged, Hungary, 1988, p.249-261.

[63]. Iskenderov B.A. Principles of radiation for elliptic equation of higher order in the cylindrical domain. 7th Czechoslovak conference on differential equation and their applications. Praha, 1989, p.1.

[64]. Искендеров Б.А., Мехтиева А.И. Принципы излучения для уравнения Гельмгольца в многомерном слое с импедансными краевыми условиями. Диф. уравнения, 1993, т.29, №8, с.1462-1464.

[65]. Iskenderov B.A., Mehdieva A.J. Principles of radiation for Helmholtz equation in n-dimensional layer with impedance boundary conditions. V.Ulusal matematik sempozyumu, 24-28 Ağustos 1992, p.55-56.

[66]. Iskenderov B.A. The behavior of the solutions of initial-boundary value problem for the wave equation with finite perturbation as $t \to +\infty$. The 2-nd Turkish-Azerbaijan mathematics simposium, 8-14 September, 1992 Baku, p.45-46.

[67]. Искендеров Б.А. Принципы излучения для эллиптических уравнений высокого порядка в цилиндрической области. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1996, т.36, №1, с.73-91.

[68]. Искендеров Б.А., Сулейманов С.Е. Принцип предельной амплитуды для корректного по И.Г.Петровскому уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами. Труды ИММ АН Азербайджана, 1988, т.8, с.81-90.

СОДЕРЖАНИЕ